

69.20 - 6



A MATEMÁTICA E AS TELECOMUNICAÇÕES

Roberto Miscow Filho

Os mais novos talvez não conheçam o nome e a obra do professor Julio César de Mello e Souza que se tornou bastante popular em nosso país sob o pseudônimo de Malba Tahan, com o qual assinou dezenas de livros versando sobre lendas e narrativas orientais, destacando-se o clássico "O Homem que Calculava". Foi o professor Mello e Souza, sem dúvida alguma, o grande divulgador, o incansável entusiasta e gerador de entusiasmos pelo estudo da matemática no Brasil. Entre os livros deixados pelo saudoso mestre, destaca-se uma coleção de artigos publicada sob o título "Histórias e Fantasias da Matemática". No primeiro capítulo deste livro aparece a seguinte citação de Condorcet:¹

"O marinheiro, que a exata determinação da longitude preserva do naufrágio, deve a vida a uma teoria concebida vinte séculos mais cedo por homens de

gênio que tinham em vista meras especulações geométricas."

Este misterioso acordo entre as especulações matemáticas e as aplicações da ciência pode ser facilmente verificado nos diversos ramos da Engenharia. O presente trabalho tenciona mostrar apenas *alguns* exemplos do citado acordo, na área específica das telecomunicações.

Os exemplos são sobejamente conhecidos pelos especialistas, isto é, os engenheiros que operam os sistemas telegráficos e telefônicos, as redes de microondas etc. Entretanto, para a maior parte dos leitores desta Revista supõe-se sejam novidade os fatos abaixo apresentados.

A ANÁLISE DE FOURIER — Quando se adquire um equipamento elétrico, uma geladeira, um liquidificador etc., todos sabemos que tais aparelhos são normalmente "alimentados", isto é, recebem energia, pela rede elétrica pública sob a forma de uma corrente elétrica di-

ta "alternada", isto é, um "sinal" elétrico que, visualizado, p. ex., numa tela de televisão, surge como uma "senóide", uma curva periódica, isto é, com uma definida frequência de repetição (geralmente no Brasil esta frequência é de 60 Hertz).

Ora, no século XIX, mais precisamente em 1822 (ano da nossa Independência, tempo em que os motores, a lâmpada elétrica, o telégrafo, o telefone etc. não eram nem imaginados), o matemático francês Joseph Fourier, analisando problemas referentes ao calor, mostrou como funções periódicas cujos gráficos sejam bem mais complexos que o de uma simples senóide podem ser decompostas em um somatório de infinito número de senóides, cada uma com uma amplitude e uma frequência bem determinada. Tais estudos deram origem à chamada "análise de Fourier" que pode

ser estendida também aos chamados sinais (ou funções) não-periódicos.

Um sinal de voz, por exemplo, o som da vogal "a", voz masculina, se gravado e reproduzido na tela de um osciloscópio ou de uma televisão, daria um "desenho" semelhante ao representado na figura 1.²

Pois bem, de acordo com a análise de Fourier, um tal sinal ou outro semelhante pode ser decomposto (isto é, equivalente) em uma quantidade infinita de senóides, cada uma de amplitude infinitamente pequena e em uma frequência determinada. Usando a mesma análise, podemos traçar um "espectro", isto é, um gráfico mostrando como a energia do sinal se distribui ao longo de uma escala de frequências, ou seja, com que "intensidade" as diferentes frequências do sinal participam de sua composição.

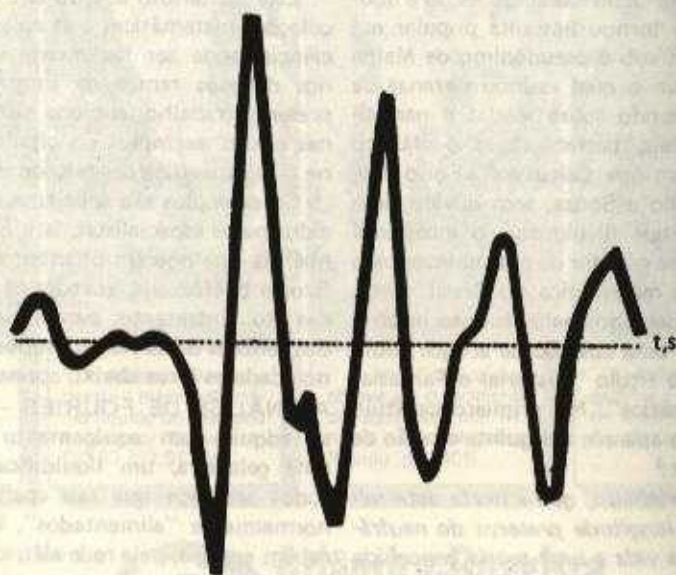


Figura 1 - Forma de onda de um som/a, voz masculina.

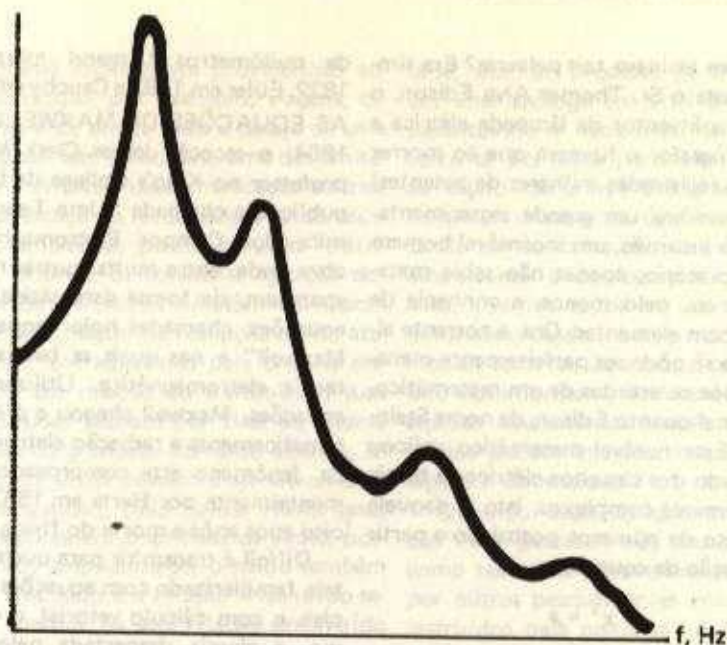


Figura 2 — Espectro de frequência de um som/a, voz masculina.

A figura 2 ilustra um "espectro" típico do som representado pela figura 1.

Isto que foi exemplificado para um único e simples som é válido para um complexo sinal de voz ou de música. O engenheiro de telecomunicações quando projeta uma rede de cabos telefônicos sabe que cada par de fios utilizado tem uma chamada "faixa de passagem", isto é, tais condutores elétricos agem como um "filtro", atenuando umas frequências mais que as outras e, portanto, eles podem distorcer o sinal transmitido se a faixa de frequências do sinal ultrapassar a largura da faixa de passagem da linha.

Um aparelho de Hi-Fi, isto é, Alta Fidelidade, tem este nome porquanto sua faixa passante deve ser suficientemente larga para deixar passar a faixa do sinal a ser reproduzido, ou seja: a música de boa qualidade, distinguindo-se todos os instrumentos e a voz do cantor.

Muitas aplicações poderiam ser citadas nas quais se veria como uma teoria desenvolvida há mais de cem anos serve hoje de base para o projeto de milhões de redes telefônicas, de televisão, de transmissão de dados e outras.

OS NÚMEROS COMPLEXOS — Hoje em dia, no Brasil e no resto do mundo, está generalizado o uso da corrente alternada nas redes elétricas. Ora, em 1887, quando George Westinghouse iniciava nos Estados Unidos a instalação das primeiras redes em corrente alternada, distribuiu-se na cidade de Nova York um panfleto onde se dizia o seguinte:³

"Cuidado! As correntes alternadas são perigosas! Elas servem somente para alimentar a cadeia elétrica.

A única semelhança entre um sistema de iluminação em corrente alternada e um outro em corrente contínua é que ambos provêm da mesma usina termelétrica."

Quem assinava tais palavras? Era simplesmente o Sr. Thomas Alva Edison, o gênio, o inventor da lâmpada elétrica e do fonógrafo, o homem que ao morrer deixou registradas milhares de patentes!

Edison era um grande experimenter, um intuitivo, um incansável homem de laboratório; apenas não sabia matemática ou, pelo menos, a conhecia de modo bem elementar. Ora, a corrente alternada só pôde ser perfeitamente manejada após os estudos de um matemático, tão genial quanto Edison, de nome Steinmetz. Este notável matemático aplicou ao estudo dos circuitos elétricos a teoria dos números complexos, isto é, daquele conjunto de números postulado a partir da solução da equação

$$x^2 = a$$

onde a é qualquer elemento do conjunto dos reais.

Os números complexos constituem hoje a base para o entendimento de um operador matemático chamado "impedância" e que relaciona a tensão e a corrente num circuito elétrico. O engenheiro de telecomunicações usa, quase instintivamente, o conceito de impedância quando projeta linhas telefônicas, cabos coaxiais, filtros, amplificadores de sinal etc. Por exemplo, procura-se sempre obter o chamado "casamento de impedâncias" sem o qual podem acontecer os desagradáveis e indesejáveis efeitos dos "fantasmas" na recepção de televisão ou do eco nas conversações telefônicas.

Assim, mais uma vez, assistimos à moderna aplicação de relações matemáticas descobertas por homens como Argand, Euler, Cauchy e outros que viveram em uma época onde nem se sonhava com a possibilidade de a voz humana ser conduzida por um par de fios de cobre ligando cidades afastadas por centenas

de quilômetros (Argand morreu em 1822, Euler em 1783 e Cauchy em 1857).

AS EQUAÇÕES DE MAXWELL — Em 1864, o escocês James Clerk Maxwell, professor no King's College de Londres, publicou a chamada "Uma Teoria Dinâmica dos Campos Eletromagnéticos", obra onde, entre muitas outras relações, aparecem, de forma sistemática, quatro equações, chamadas hoje "equações de Maxwell" e nas quais se baseia toda a teoria eletromagnética. Utilizando tais equações, Maxwell chegou a prever matematicamente a radiação eletromagnética, fenômeno este comprovado experimentalmente por Hertz em 1887, isto é, oito anos após a morte do físico escocês.

Difícil é transmitir para quem não esteja familiarizado com equações diferenciais e com cálculo vetorial, o entusiasmo, a alegria despertada pelo estudo destas quatro equações de aparência tão simples e de significado tão profundo. Sobre elas, o famoso pesquisador do Bell Systems J. R. Pierce escreveu:

"Qualquer um que sinta inclinação por algo além do estritamente prático, convém tentar compreender as equações de Maxwell, simplesmente para o bem de sua alma."

Observando o retrato austero daquele escocês, ornado por uma digna barba tão adequada à figura de um homem verdadeiramente profético, e imaginando no espaço milhões de ondas emitidas por satélites artificiais e por gigantescas antenas de rádio, talvez possamos sentir um pouco daquela admiração agradável.

ESPAÇOS N -DIMENSIONAIS, CORPOS DE GALOIS E OUTROS ASSUNTOS ABSTRATOS — Quando passamos um telegrama a um amigo ou parente distante, desejamos que o nosso correspondente receba o texto correto; se o

telegrama implicar em providências administrativas, por exemplo, viagens, dinheiro etc., cresce mais o desejo de uma recepção sem erros. Ora, uma das limitações inevitáveis da comunicação elétrica é a presença do ruído; não o ruído acústico, ambiental, porém o ruído "elétrico", oriundo da constante agitação térmica de partículas subatômicas. Como os sinais chegam na recepção muito atenuados, enfraquecidos pela própria distância em relação ao transmissor, suas amplitudes acabam por ficar na mesma ordem de grandeza do ruído elétrico, isto é, os sinais passam a ser envolvidos, "mascarados", pelo ruído. Neste caso, de nada valerá amplificar os sinais, porquanto, ampliando-os, o ruído também será ampliado e a relação sinal/ruído será a mesma. Se esta relação sinal/ruído for baixa, poderão ocorrer erros na recepção: é o sinal de televisão com "chuveiro"; é o sinal telefônico que mal dá para ser entendido; é o telegrama com várias letras e até palavras erradas...

Em 1948, um pesquisador americano de nome Claude E. Shannon publicou um trabalho intitulado: "Uma Teoria Matemática da Comunicação";⁵ entre outras afirmações, Shannon declarava que podemos transmitir mensagens através de um canal ruidoso (entenda-se: ruído elétrico) com uma probabilidade de erro tão pequena quanto se deseje, desde que respeitemos a chamada "capacidade" do canal, parâmetro este equacionado em função da "faixa passante" e da relação sinal/ruído do canal. Shannon dizia, em um famoso teorema, que é possível "codificarmos" a mensagem de modo a conseguir aquela probabilidade. (Obs.: no presente contexto a palavra "codificação" não tem o mesmo sentido dos códigos secretos das comunicações militares ou diplomáticas; tra-

ta-se, sim, do processo de transformar um sinal análogo em sinal digitalizado, substituindo-se cada nível de tensão ou corrente por uma particular seqüência de dígitos binários.) Ora, podemos demonstrar o teorema de Shannon utilizando um conceito tão abstrato quanto interessante: o dos espaços n -dimensionais. Vivemos todos em um espaço a 3 dimensões; desde o berço nos acostumamos ao sensível, àquilo que os olhos e o tato nos informam. Realmente, somente aqueles ambientados à abstração matemática podem imaginar o que seja um espaço n -dimensional.

Shannon mostrou que a "codificação" era possível; não escreveu sobre como realizá-la. Este trabalho foi feito por outros pesquisadores encorajados e instruídos pela pesquisa inicial. Há, de fato, dezenas de processos de "codificação" das mensagens que permitem fazer, automaticamente (e este é o ponto emocionante), a correção de um ou mais erros ocorridos na recepção!

Em 1832, morria aos 22 anos, em estúpido duelo, o jovem e genial matemático Evaristo Galois.⁶ Na noite que antecedeu sua morte, Galois passou suas últimas horas redigindo importantes conclusões de seus trabalhos. Na teoria da análise matemática são hoje famosas as estruturas chamadas "corpos de Galois" (em inglês: os "Galois fields"). Pois bem, uma das maneiras de elaborar um "código" corretor automático de erros em transmissão digital é baseada no estudo dos "corpos de Galois".⁷

As considerações anteriores não nos impressionam muito quando imaginamos as ligações telegráficas convencionais feitas entre cidades ou mesmo entre países; há toda uma complexa legislação de telecomunicações, aprovada por organizações internacionais, regulando os va-

lores mínimos dos sinais recebidos e as relações sinal/ruído adequadas aos usuários. O usuário está protegido por normas e regulamentos. Entretanto, o que ocorrerá em situações de limiar, como por exemplo, um astronauta a bordo de uma nave espacial aproximando-se do longínquo planeta Júpiter? Não podemos, evidentemente, sobrecarregar a nave com o peso excessivo de um transmissor ultrapotente, transmissor este que garantiria uma excelente relação sinal/ruído aqui na Terra e uma conseqüente ausência de erros na recepção. Que fazer? A solução está nesta matemática elaborada, abstrata, difícil mesmo, concebida por homens que viveram em épocas tão separadas de nós. Sem esta matemática, o homem jamais teria desembarcado na Lua!

A TEORIA DOS NÚMEROS — Desde os bancos escolares do curso primário aprendemos a conhecer os chamados números primos, as regras de divisibilidade, o máximo divisor comum, o mínimo múltiplo comum. Tais conceitos pertencem a uma vasta coleção de postulados, teoremas, propriedades, relações entre números inteiros e que constitui a chamada "teoria dos números"; segundo Carl Friedrich Gauss (1777-1855).⁸

"A matemática é a rainha das ciências, mas a aritmética é a rainha da matemática."

Suponhamos o seguinte problema: "quanto são os números inteiros positivos inferiores a um certo número N e primos com N ?" Ou então este outro: "seja um número primo p ; quais são os números inteiros a inferiores a p que elevados a uma potência k , inferior a p , isto é, a^k , $k < p$, dão como restos na divisão por p os números 0, 1, 2, 3, 4... $(p-1)$ (isto é, os inteiros inferiores a p)?"

Problemas deste tipo podem parecer meros jogos de paciência para noites chuvosas. Ocorre, entretanto, que a teoria dos números primos constitui a base da moderna técnica da criptografia. Podemos imaginar o seguinte sistema: dois computadores, por exemplo, um no Rio Grande do Sul, outro em Manaus, controlando a transmissão recíproca de mensagens entre as duas cidades. Suponhamos que um "inimigo", isto é, uma pessoa não autorizada, consiga interceptar a mensagem transmitida.

Se esta mensagem foi criptografada com a chamada "cifra-de-domínio-público", mesmo que o interceptador conheça a cifra (grifo nosso) e mesmo que ele disponha de um grande computador, levará centenas, talvez milhares de anos para decifrar a mensagem interceptada.⁹ Esta afirmativa, que pode parecer reles bravata, na realidade está solidamente assentada sobre a elegante e abstrata teoria dos números!

AS COMPLICADAS FUNÇÕES DE BESSEL — O nosso carro está quase parado no meio de um tráfego nervoso; apertamos a tecla do rádio e, imediatamente, um som musical, transmitido em FM, traz-nos uma distensão, devolve-nos a calma, faz com que esqueçamos um pouco as agruras da cidade grande.

Hoje em dia, os engenheiros de telecomunicações dominam perfeitamente a tecnologia da transmissão e da recepção de sinais FM, isto é, sinais modulados em frequência; este entendimento só se tornou possível graças à análise de Fourier e à aplicação do conhecimento de certas relações matemáticas chamadas "funções de Bessel". As funções de Bessel originam-se da solução de determinadas equações diferenciais lineares de 2ª ordem, coeficientes variáveis, estudadas

pelo astrônomo alemão Fridrich Wilhelm Bessel em 1817.

Naquele tempo, se o astrônomo Bessel desejasse ouvir um concerto de Mozart, teria que deslocar-se de seu observatório para um teatro onde a música estivesse sendo executada. No pequeno rádio do automóvel recebemos os sons de uma orquestra que chegam até nós, em alta fidelidade, através de ondas de rádio moduladas em frequência. Além da análise dos sinais FM, as funções de Bessel surgem na interpretação de diversos outros fenômenos das telecomunicações; por exemplo: na análise da antena helicoidal, na avaliação da distorção de fase na transmissão de dados, no estudo da propagação de microondas em guias de seção circular e outros.

CONCLUSÃO — Os poucos exemplos acima apresentados referem-se, apenas, a uma específica área da Engenharia; entretanto, permitem-nos inferir o seguinte: nós, modernos, somos devedores, somos beneficiários dos juros de um capital de cultura acumulado durante séculos de procura desinteressada do saber, *ars gratia artis*. Lamentavelmente, vivemos hoje sob uma atmosfera de generalizado pragmatismo. O grande educador norte-americano Robert Maynard Hutchins levou anos profligando esta tendência utilitarista da educação contemporânea. Por exemplo, aqui no Brasil tivemos, entre outras medidas pouco felizes, a retirada do latim do curso secundário e a introdução, nos colégios, dos chamados "cursos profissionalizantes".

O que nós, homens deste final de século XX, estamos legando aos jovens? Um mero desejo de triunfar na vida? Uma simples ambição de conquistar o diploma profissional e com ele a segurança e o bem-estar apenas? Onde estão os ideais de nobreza e de coragem? Mais do que nunca, torna-se necessário acreditar na fecundidade natural da inteligência; o processo educativo deve ter o alcance de um "farol de milha", não deve estar vinculado ao imediatismo, à busca de soluções para os problemas diários. Lembrando Saint-Exupéry, diríamos que o educador deve acreditar que "*Só o Espírito, soprando sobre a argila, pode criar o Homem.*"¹⁰

Bibliografia

1. MELLO E SOUZA, Julio César. *Histórias e Fantasias de Matemática*. Editora Getúlio Costa, 1939.
2. MISCOW FILHO, Roberto. *Levantamento de Características de Língua Portuguesa Utilizáveis no Processamento Digital dos Sinais de Voz*. Tese de Mestrado (1977).
3. SCOTT, R. E. *Linear Circuits*. Addison-Wesley Publishing Co. Inc. 1960.
4. PIERCE, J. R. *Electrons, Waves and Messages*. Hanover House, 1956.
5. SHANNON, C. E. *A Mathematical Theory of Communication*. The University of Illinois Press, 1964.
6. MELLO E SOUZA, Julio César. *Op. Cit.*
7. LIN, Shu. *An Introduction to Error-Correcting Codes*. Prentice-Hall, Inc. 1970.
8. STEWART, B. M. *Theory of Numbers*.
9. HELLMAN, Martin E. *The Mathematics of Public-Key Cryptography*. Scientific American, 1979 (130-139).
10. SAINT EXUPÉRY, Antoine. *Terra dos Homens*. Ed. José Olympio, 1975.



O Cel **ROBERTO MISCOW FILHO** pertence ao Quadro de Engenheiros Militares e possui os cursos militares da Academia Militar das Agulhas Negras (Infantaria), da Escola de Aperfeiçoamento de Oficiais (Comunicações) e do Instituto Militar de Engenharia (Engenheiro de Comunicações e Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica).

Prestou serviços no 13º Batalhão de Caçadores, Joinville-SC (1953-1956), na Academia Militar das Agulhas Negras (1957-1958) e no Serviço Rádio do Ministério do Exército (1963-1968). Atualmente é o Chefe da Divisão de Ensino e Pesquisa do Instituto Militar de Engenharia (IME).