

# Análise da influência do revestimento na transferência de calor transiente em varetas combustíveis de reatores nucleares

Filipe Alcântara Soares\*, Rodrigo Otávio de Castro Guedes, Francesco Scofano Neto  
Instituto Militar de Engenharia  
Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.  
Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270,  
\*alcantara\_filipe@hotmail.com

**RESUMO:** Este trabalho apresenta uma solução analítico-numérica para a transferência de calor transiente por condução com termo fonte de calor variável em varetas combustíveis de reatores nucleares. O problema térmico no material de revestimento foi examinado através da análise por parâmetros concentrados. Utilizou-se o método da Transformada Integral para solucionar analiticamente a modelagem desenvolvida, e posteriormente, o sistema de equações diferenciais ordinárias resultante foi avaliado numericamente. Em acidentes nucleares, o período necessário para que o revestimento comece a se fundir, chamado de tempo crítico, é um parâmetro de grande interesse. Os resultados mostraram que o material de revestimento não possui influência térmica significativa na transferência de calor na vareta combustível. Além disso, foram abordadas as variações no tempo crítico no que tange à influência do número de Biot, sendo que esse pode desempenhar um importante papel a fim de aumentar o período necessário para a fusão do revestimento.

**PALAVRAS-CHAVE:** Varetas combustíveis. Análise térmica transiente. Termo fonte de calor variável. Revestimento. Tempo crítico.

**ABSTRACT:** This work presents a numerical-analytical solution for the transient conduction heat transfer with a variable source term in fuel rods of nuclear reactors. The thermal problem in the cladding was examined through the lumped system analysis. The Integral Transform Technique was used to solve analytically the model here developed and the resulting ordinary differential equations system was evaluated numerically. In nuclear accidents, the required period for the cladding melting is a parameter of great interest, which is called critical time. The results showed that the cladding material do not have major thermal influence in the fuel rods heat transfer. Furthermore, critical time variations due to changes in to Biot number was examined and it was concluded that the Biot number plays an important role in order to increase the necessary time for the cladding material melting.

**KEYWORDS:** Fuel rods. Transient thermal analysis. Variable heat source term. Cladding. Critical time.

## 1. INTRODUÇÃO

Um reator nuclear PWR (reator de água pressurizada) é composto por varetas de combustíveis fissionáveis, onde se processa uma reação de fissão nuclear, sendo essa definida como a divisão do núcleo de um átomo pesado em dois menores, quando atingido por um nêutron. Dentro do processo de resfriamento da vareta combustível, após a colisão, uma imensa quantidade de energia é liberada dentro deste elemento, sendo transferida por condução de calor para a superfície e, a partir do revestimento, o calor é transferido por convecção através de um fluido refrigerante [1]. Em seguida, este fluido aquecido troca calor com um fluido frio fazendo com que esse se evapore a fim de operar um ciclo de potência à vapor do tipo Rankine.

De acordo com [2], as varetas combustíveis normalmente são hastes cilíndricas, compostas de pequenas pastilhas de urânio-235, fechadas por um material de revestimento, usualmente Zircaloy-4, conforme visto na Figura 1. Um acidente nuclear pode acontecer devido ao arrefecimento inadequado dos cilindros combustíveis, onde a quantidade de calor gerado no reator nuclear excede o calor removido pelo sistema de resfriamento, até o ponto em que o elemento combustível excede o seu ponto de fusão [3].

De acordo com [4], sendo o fluxo de nêutrons uniforme, o termo fonte de calor volumétrico permanece constante, sendo possível avaliá-lo através do conhecimento do número de núcleos fissionáveis e do valor do fluxo de nêutrons. Em caso de falha no sistema de barras de controle, a incidência de nêutrons torna-se descontrolada, e então o termo fonte de calor volumétrico passa a variar. Dentro deste contexto, a temperatura do material de revestimento aumenta e, após determinado tempo ele se funde. E em caso de falha nos outros sistemas de contenção, um acidente nuclear acontece, onde os produtos radioativos são

lançados ao meio ambiente causando danos irreversíveis à vida humana.

O comportamento da fusão do combustível durante um acidente é basicamente determinado resolvendo a equação da condução de calor [5]. Portanto, se a variação temporal e espacial do termo fonte de calor volumétrico é conhecida, o tempo crítico, definido como o período para que a temperatura de fusão do material de revestimento seja alcançada, pode ser avaliado. Logo, uma descrição precisa da distribuição de temperatura transiente no elemento combustível é essencial para prever o comportamento térmico em um reator nuclear em caso de um acidente.

Este trabalho apresenta uma solução analítico-numérico para a transferência de calor transiente com termo fonte de calor variável em varetas combustíveis de reatores nucleares. Duas variações para o termo fonte de calor são propostas: uma em função apenas da coordenada temporal, e outra em função do tempo e do espaço. Ademais, a solução pode tratar qualquer tipo de variação proposta para o termo de geração de calor.

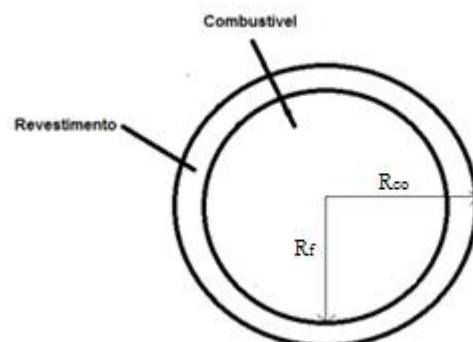


Fig. 1 – Problema unidimensional na vareta combustível.

O problema térmico na região do material de revestimento foi examinado através da análise por parâmetros concentrados. Para a região do material combustível utilizou-se a equação da condução de calor. Aplicou-se o método da Transformada Integral para solucionar analiticamente a modelagem desenvolvida e, posteriormente, o sistema de equações diferenciais ordinárias resultante foi avaliado numericamente.

Considera-se a hipótese comumente aceita: problema unidimensional na direção radial. Tal simplificação é baseada no fato de que, na direção angular, o perfil de temperatura não varia, pois a geração de calor e o arrefecimento no cilindro são uniformes em toda a circunferência. Para a direção longitudinal da vareta, tem-se que a difusão de calor nesta direção é extremamente pequena comparada com a direção radial. Por consequência, as variações de temperatura nestas duas direções do cilindro são desprezíveis, e portanto podem ser descartadas na análise térmica.

Em suma, este trabalho possui o propósito de avaliar o problema térmico na vareta combustível através da análise por parâmetros concentrados para a região do material de revestimento e, posteriormente, comparar os resultados obtidos com a solução dos autores [6], onde esses não consideraram a espessura do revestimento, ou seja, este é apenas uma posição radial do cilindro (superfície do combustível). Por fim, tal comparação de resultados permitirá avaliar a relevância da camada do material de revestimento no problema térmica da vareta combustível em escrutínio.

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

### 2.1 Condição inicial para o revestimento

Enquanto a operação do reator nuclear é bem controlada, o fluxo de nêutrons é uniforme e o termo de geração de calor volumétrico “G” do elemento de urânio permanece constante e, então, o núcleo do reator opera em regime permanente. Portanto, pode-se empregar a familiar análise por resistência térmica para encontrar a distribuição de temperatura na vareta combustível.

A resistência térmica do material de revestimento e da convecção são dadas pelas Eqs. (1) e (2), respectivamente. A aproximação vista na Eq. (1) é baseada no fato que raio do revestimento é muito menor em relação ao raio do combustível.

$$R_{T_c} = \frac{\ln\left(\frac{R_f + R_c}{R_f}\right)}{2\pi e k_c} \cong \frac{R_c}{2\pi e k_c} \quad (1)$$

$$R_{T_{conv}} = \frac{1}{2\pi(R_f + R_c)eh} \quad (2)$$

sendo que  $R_c = R_{co} - R_f$ ;  $A_{ext} = 2(R_f + R_c)e$ ;  $A_{int} = 2R_f e$ . Onde  $R_c$  é o raio do revestimento,  $e$  é a altura da vareta combustível,  $A_{ext}$  e  $A_{int}$  são respectivamente, as áreas de troca de calor da parte externa e interna do material de revestimento e  $h$  é coeficiente de transferência de calor por convecção entre a vareta combustível e o refrigerante.

A taxa de transferência de calor por condução  $q$  na pastilha combustível de urânio é dada pela geração de calor no mesmo, ocasionada pela fissão nuclear, logo:

$$q = -k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right|_{r'=R_f} 2\pi R_f e = G\pi R_f^2 e \quad (3)$$

Desprezando a resistência de contato entre o urânio e o revestimento, da análise do circuito térmico visto na Figura 2, tem-se que:

$$q = \frac{T(R_f) - T_\infty}{R_{T_c} + R_{T_{conv}}} \quad (4)$$

Substituindo as Eqs. (1), (2) e (3) na Eq. (4), obtém-se a temperatura na superfície interna do revestimento:

$$T(R_f) = T_\infty + \frac{GR_f^2}{2} \left( \frac{R_c}{R_f k_c} + \frac{1}{h(R_f + R_c)} \right) \quad (5)$$

Do circuito térmico visto na Figura 2, obtém-se também a Eq. (6). Ao substituir as Eqs. (2) e (3) na Eq. (6), determina-se a temperatura na superfície externa do revestimento, Eq. (7).

$$q = \frac{T(R_{co}) - T_\infty}{R_{T_{conv}}} \quad (6)$$

O material de revestimento é modelado a partir do conceito de parâmetros concentrados, sendo que nesta abordagem, espera-se que a temperatura em todos os pontos do elemento permaneça suficientemente uniforme. Logo, dentro desta análise a Eq. (8) precisa ser satisfeita:

$$T(R_{co}) = T_\infty + \frac{GR_f^2}{2} \left( \frac{1}{h(R_f + R_c)} \right) \quad (7)$$

A condição inicial para o material de revestimento é dada então por:

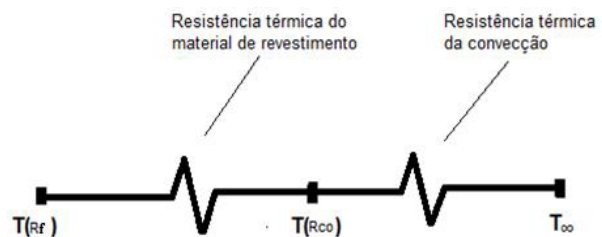


Fig. 2 – Circuito térmico na vareta combustível.

### 2.2 Condição inicial para o combustível (U0<sub>2</sub>)

A distribuição de temperatura inicial para o material combustível é obtida a partir da solução da equação de calor unidimensional em regime permanente com termo fonte de geração uniforme, Eq. (10):

$$\frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} \left( r' \frac{dT_f}{dr'} \right) = -\frac{G}{k_f} \quad 0 < r' < R_f \quad (10)$$

submetida às seguintes condições de contorno:

$$\frac{dT_f(0)}{dr'} = 0 \quad (11)$$

$$T_f(r' = R_f) = T_c(0) \quad (12)$$

A Eq. (11) refere-se a condição de simetria no centro do

cilindro. A Eq. (12) foi obtida pela análise do circuito térmico entre o material de revestimento e o refrigerante, baseado na abordagem dos parâmetros concentrados para a região do revestimento, Eq. (9). Através de uma dupla integração na Eq. (10) e aplicando as condições de contorno, Eqs (11 e 12), obtém-se a distribuição de temperatura inicial para as pastilhas combustíveis de urânio, Eq. (13).

$$T_f(r', 0) = T_\infty + \frac{GR_f^2}{2h(R_f + R_c)} + \frac{GR_f^2}{4k_f} \left( 1 - \left( \frac{r'}{R_f} \right)^2 \right) \quad (13)$$

Observe que ao substituir  $r' = R_f$  na Eq. (13), obtém-se a condição inicial para o material de revestimento, dada pela Eq. (9).

### 2.3 Problema transiente na vareta combustível

No evento de falha no sistema de barras de controle do reator nuclear, o fluxo de nêutrons passa a ser descontrolado (não uniforme) e, então, o termo de geração de calor volumétrico passa a ser variável. Consequentemente, o núcleo do reator passa a operar em regime transiente.

Para a região do combustível, onde há geração de calor, considera-se a equação da condução de calor transiente, dada por:

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial T_f}{\partial r'} \right) + \frac{g(r', t)}{k_f} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_f}{\partial t} \quad 0 < r' < R_f; \quad t' > 0 \quad (14)$$

submetida à condição de simetria no centro da vareta:

$$\frac{\partial T_f(t', 0)}{\partial r'} = 0 \quad t' > 0 \quad (15)$$

e para o contorno em  $r' = R_f$  tem-se a equação diferencial obtida da análise por parâmetros concentrados para a região do revestimento, vista a seguir:

$$\rho_c c_{p_c} V_c \frac{dT_c}{dt'} = -k_f A_{int} \frac{\partial T_f}{\partial r'} \Big|_{r'=R_f} - h A_{ext} (T_c - T_\infty) \quad (16)$$

Na Eq. (16), o lado esquerdo da igualdade representa a taxa de aumento da energia interna do revestimento, o primeiro termo do lado direito mostra a energia que entra no material de revestimento por condução, vinda do combustível, e o termo restante é referente à energia que sai por convecção do revestimento para o ambiente através do refrigerante.  $V_c$  é o volume do material de revestimento, sendo dado pela Eq. (17), onde a aproximação feita é baseada no fato que o termo  $2R_f R_c$  é muito maior que  $R_c^2$ ,

$$V_c = \pi e \left( (R_f + R_c)^2 - R_f^2 \right) \cong \pi e (2R_f R_c) \quad (17)$$

substituindo  $V_c$ ,  $A_{ext}$  e  $A_{int}$  no balanço de energia visto na Eq. (16), obtém-se a equação diferencial que rege a temperatura no material de revestimento, Eq. (18):

$$\rho_c c_{p_c} R_c \frac{dT_c}{dt'} = -k_f \frac{\partial T_f}{\partial r'} \Big|_{r'=R_f} - h \frac{R_f + R_c}{R_f} (T_c - T_\infty) \quad (18)$$

### 2.4 Formulação final do problema térmico

A partir da modelagem desenvolvida, obteve-se o problema térmico em sua forma dimensional final, onde para

a região do combustível tem-se a equação da condução de calor transiente, Eq. (14), submetida à condição inicial, Eq. (13), à condição de simetria no centro da vareta, Eq. (15) e acoplada com a equação diferencial, Eq. (18), que descreve o comportamento da temperatura no material de revestimento, submetida à condição inicial, Eq. (9).

A formulação desenvolvida anteriormente está na forma dimensional. Em geral, o procedimento de adimensionalizar as equações é oportuno, já que diminui o número de incógnitas que governam o problema sem acarretar perda de informação do mesmo. Além disso, este procedimento ajuda compreender melhor o significado físico de cada termo presente nas equações. A fim de adimensionalizar o problema formulado, os seguintes parâmetros adimensionais são utilizados:

$$\theta_f = \frac{T_f - T_\infty}{T_\infty} \quad (19)$$

$$\theta_c = \frac{T_c - T_\infty}{T_\infty} \quad (20)$$

$$r = \frac{r'}{R_f} \quad (21)$$

$$t = \frac{\alpha_f t'}{R_f^2} \quad (22)$$

$$\varepsilon = \frac{R_c}{R_f} \quad (23)$$

$$\mu = \frac{\rho_c c_{p_c}}{\rho_f c_{p_f}} \quad (24)$$

$$Bi = \frac{h(R_f + R_c)}{k_f} \quad (25)$$

$$G' = \frac{g(r', t') R_f^2}{k_f T_\infty} \quad (26)$$

$$G^* = \frac{GR_f^2}{k_f T_\infty} \quad (27)$$

Ao substituir os parâmetros adimensionais no problema formulado anteriormente, obtém-se o mesmo em sua versão final adimensional:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta_f}{\partial r} \right) + G'(r, t) = \frac{\partial \theta_f}{\partial t} \quad 0 < r < 1; \quad t > 0 \quad (28)$$

$$\theta_f(r, 0) = \frac{G^*}{2} \left( \frac{1}{Bi} + \left( \frac{1-r^2}{2} \right) \right) \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \theta_f(t, 0)}{\partial r} = 0 \quad t > 0 \quad (30)$$

$$\mu \varepsilon \frac{d\theta_c}{dt} = - \frac{\partial \theta_f}{\partial r} \Big|_{r=1} - Bi \theta_c \quad t > 0 \quad (31)$$

$$\theta_c(0) = \frac{G^*}{2} \frac{1}{Bi} \quad (32)$$

Sabe-se que da análise por parâmetros concentrados, tem-se que  $\theta_f(1, t) \cong \theta_c(t)$ . Em suma, a Eq. (28) representa a condução de calor no elemento combustível, submetida à condição inicial, Eq. (29), e à condição de simetria, Eq. (30). Evidentemente, a equação diferencial parcial, Eq.(28),

necessita de duas condições de contorno em relação ao espaço. Como o contorno em  $r = 0$  já foi especificado, precisa-se obter informação em  $r = 1$ . Observe que esta informação está contida na Eq. (31), que rege o comportamento da temperatura no material de revestimento. Tal fato faz com que as soluções para a temperatura transiente nas duas regiões (combustível e revestimento) estejam acopladas. A Eq. (32) representa a condição inicial no material de revestimento.

## 2.5 Solução pela transformada integral

A modelagem desenvolvida para o problema térmico, Eqs. (28 à 32), será resolvida pelo método da Transformada Integral. De acordo com [7], esta técnica é baseada em uma expansão de autofunções, com o auxílio do problema regular de autovalores de Sturm-Liouville para a difusão de calor em coordenadas cilíndricas. O principal objetivo desta técnica é transformar o problema original em um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Após solucionar o sistema de EDO's, é feita uma relação inversa para determinar a distribuição de temperatura original. Detalhes da solução são apresentados a seguir. A solução  $\theta_f(r,t)$  em termos de uma expansão das autofunções, relacionadas ao problema homogêneo de autovalor no domínio considerado é dada por:

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) R_o(\beta_m, r) \quad (33)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade das autofunções  $R_o(\beta_m, r)$ , obtém-se uma expressão geral para os coeficientes  $A_m(t)$ ,

$$A_m(t) = \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \int_0^1 r \theta_f(r,t) R_o(\beta_m, r) dr \quad (34)$$

reescrevendo a Eq. (33),

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(\beta_m)} R_o(\beta_m, r) \int_0^1 r \theta_f(r,t) R_o(\beta_m, r) dr \quad (35)$$

o par da transformada integral em relação à variável  $r$  para a função  $\theta_f(r,t)$  é dado pela Eq. (36), que representa a transformada, e pela Eq. (37), que descreve a inversa da transformada:

$$\overline{\theta_m(t)} = \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \int_0^1 r \theta_f(r,t) R_o(\beta_m, r) dr \quad (36)$$

$$\theta_f(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} R_o(\beta_m, r) \overline{\theta_m(t)} \quad (37)$$

Conforme [7], após obter o par da transformada integral, transforma-se a equação diferencial parcial, Eq. (28), em um conjunto de equações diferenciais ordinárias, representadas na Eq. (38), submetidas às condições iniciais transformadas (Eq. 39), onde ambas estão relacionadas com a quantidade de autovalores a serem considerados na análise do problema.

$$\frac{d\overline{\theta_m(t)}}{dt} + \beta_m^2 \overline{\theta_m(t)} = \overline{g_m(t)} + \dots \dots \frac{R_o(\beta_m, 1)}{N^{1/2}(\beta_m)} (\overline{g(t)} + Bi\theta_c(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{d\overline{\theta_n(t)}}{dt} \quad (38)$$

$$\overline{\theta_m(0)} = \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \int_0^1 r \theta_f(r,0) R_o(\beta_m, r) dr \quad (39)$$

E acoplado com,

$$\mu \varepsilon \frac{d\theta_c}{dt} = -Bi\theta_c - \overline{g(t)} - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f_n} \frac{d\overline{\theta_n(t)}}{dt} \quad (40)$$

onde a EDO da Eq. (40) é submetida à condição inicial (32). Algumas incógnitas que aparecem nas relações anteriores são dadas por:

$$\overline{g_m(t)} = \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \int_0^1 r G'(r,t) R_o(\beta_m, r) dr \quad (41)$$

$$A_{mn} = \frac{R_o(\beta_m, 1)}{N^{1/2}(\beta_m)} \overline{f_n} = \frac{R_o(\beta_m, 1)}{N^{1/2}(\beta_m)} \frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} \int_0^1 r R_o(\beta_m, r) dr \quad (42)$$

$$\overline{g(t)} = - \int_0^1 r G'(r,t) dr \quad (43)$$

Os autovalores  $\beta_m$  são dados pelas raízes positivas da equação transcendental, Eq. (44). A fim de resolver esta e obter os autovalores, foi utilizado um esquema numérico do tipo Newton-Raphson [8]. E  $R_o(\beta_m, r)$  e  $1/N^{1/2}(\beta_m)$  são, respectivamente, as autofunções e o inverso da raiz quadrada da norma do problema regular de autovalores de Sturm-Liouville em coordenadas cilíndricas.

$$\beta_m J_1(\beta_m) = Bi J_0(\beta_m) \quad (44)$$

$$R_o(\beta_m, r) = J_0(\beta_m r) \quad (45)$$

$$\frac{1}{N^{1/2}(\beta_m)} = \frac{\sqrt{2}}{J_0(\beta_m)} \frac{\beta_m}{\sqrt{\beta_m^2 + Bi^2}} \quad (46)$$

Em suma, o problema obtido, Eqs. (38, 39, 40 e 32), em sua forma matricial é do tipo,

$$[C_{mn}] \{y'\} + [D_{mn}] \{y\} = \{H_m(t)\} \quad (47)$$

$$\{y(0)\} = \{E_m\} \quad (48)$$

onde  $\{y\}$  é o vetor coluna das temperaturas transformadas  $\theta_m(t)$ , acoplado com a temperatura do material de revestimento  $\theta_c(t)$ , sendo que  $\{y'\}$  representa as derivadas.  $[C_{mn}]$  é uma matriz de coeficientes conhecidos,  $[D_{mn}]$  é uma matriz diagonal com elementos sabidos,  $\{H_m\}$  é um vetor coluna em função do tempo e  $\{E_m\}$  é o vetor coluna que representa as condições iniciais.

A fim de obter a distribuição de temperatura transiente na vareta combustível, o sistema de equações diferenciais ordinárias resultante, explicitado em sua forma matricial pelas Eqs. (47 e 48), foi avaliado numericamente. Após obter  $\overline{\theta_m(t)}$  (temperaturas transformadas), aplica-se a fórmula de inversão, dada pela Eq. (37), e finalmente determina-se a distribuição de temperatura transiente na vareta combustível.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

De acordo com [9], os parâmetros de um típico reator nuclear PWR podem ser vistos na Tabela 1. As propriedades médias para a pastilha de Urânio e para o revestimento de Zircônio são apresentadas na Tabela 2, conforme [3]. Como mencionado anteriormente, se o termo fonte variável é conhecido, a distribuição transiente no elemento combustível pode ser obtida. Este trabalho apresenta resultados para duas variações propostas para o termo de geração de calor: uma em função da coordenada temporal, denominado caso 1, Eq. (49), e outra em função do tempo e do espaço, caso 2, Eq. (50). A partir dos dados presentes nas Tabelas 1 e 2, os seguintes parâmetros adimensionais são determinados:  $\mu=0,5753$ ;  $\varepsilon=0,1390$ ;  $G^*=6,2618$ .



$$\text{Caso 1: } G' = G^* (1 + c_1 t) \quad (49)$$

$$\text{Caso 2: } G' = G^* (1 + c_2 r^2) e^{c_3 t} \quad (50)$$

**Tab 1: Parâmetros de um reator nuclear PWR.**

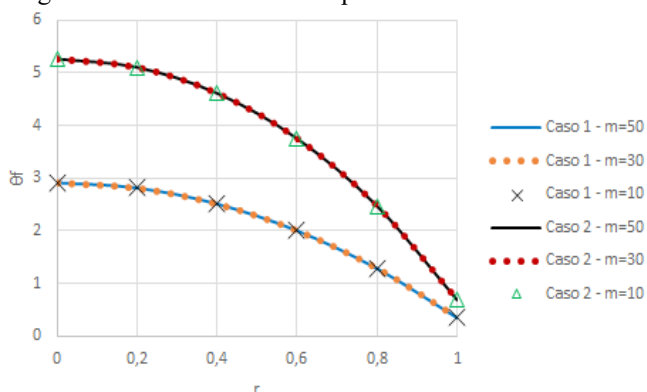
G (kW/m³)	318121
Rf (mm)	4,1
Rc (mm)	0,57
Rco (mm)	4,67
T∞ (°C)	305

**Tab 2: Propriedades médias da vareta combustível.**

Propriedades	Combustível	Revestimento
$\rho$ (kg/m³)	10330	6415
$k$ (W/mK)	2,8	30,8
$c_p$ (J/kgK)	421	390

Conforme visto no desenvolvimento da modelagem do problema térmico, após a solução do sistema de equações diferenciais resultante, aplica-se a fórmula de inversão, Eq. (37), para obter a distribuição de temperatura transiente na vareta combustível. A Eq. (37) é baseada em expansão das autofunções do problema de autovalor de Sturm-Liouville em coordenadas cilíndricas, sendo de interesse verificar a convergência da solução, a fim de obter resultados convergidos. A análise de convergência foi baseada dentro do seguinte critério: se ao aumentar largamente a quantidade de termos do somatório, o resultado final da grandeza de interesse não variar significativamente, o mesmo está convergido.

A Figura 3 ilustra este procedimento para as duas variações de termos fontes propostos, casos 1 e 2. O gráfico apresenta o perfil de temperatura adimensional ao longo da direção radial da vareta combustível. As curvas para o caso 1 são em  $t=1,5$ , enquanto as curvas para o caso 2 são em  $t=5$ , e ambos os casos são para  $Bi=15$ . Percebe-se que em ambos os casos analisados, as curvas com 10, 30 e 50 termos do somatório apresentam resultados similares, logo, uma expansão das autofunções com 10 termos é suficiente para prever resultados convergidos nos tempos especificados. No geral, é de interesse verificar o transiente até o tempo crítico, e dentro deste intervalo de interesse a solução mostra uma rápida convergência com baixo custo computacional.



**Fig. 3 –** Convergência da solução desenvolvida para os casos propostos.

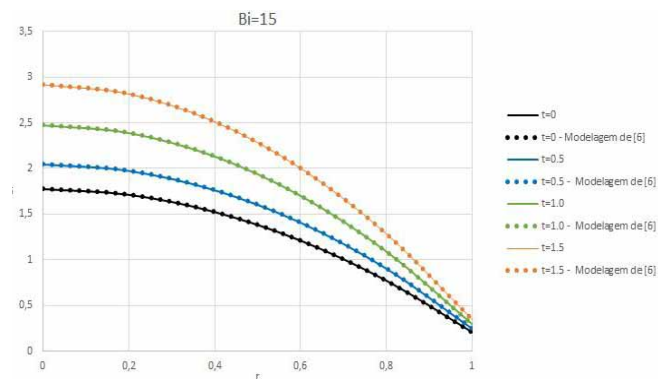
O gráfico da Figura 4 apresenta o perfil de temperatura adimensional ao longo da direção radial da vareta combustível para o caso 1, onde o termo fonte de calor varia apenas em função da coordenada temporal. Os resultados apresentados pela modelagem desenvolvida neste artigo foram comparados com a solução obtida por [6]. O gráfico visto na Figura 4 é para  $Bi=15$  e  $c_f=0,5$ , em quatro instantes de tempos,  $t=0$  (condição inicial),  $t=0,5$ ,  $t=1$  e  $t=1,5$ .

Um dos grandes interesses deste trabalho é verificar a influência da região do material de revestimento na transferência de calor por condução na vareta combustível. Através da Figura 4, percebe-se que a modelagem desenvolvida neste trabalho, onde a região do revestimento foi examinada através do conceito dos parâmetros concentrados, apresentou resultados coincidentes com a solução dos autores [6], onde esses não consideraram a espessura do revestimento na análise do problema térmico. Logo, pode-se inferir que a região do material de revestimento não apresenta maiores influências térmicas na transferência de calor por condução da vareta combustível, já que os resultados comparados apresentaram grande concordância.

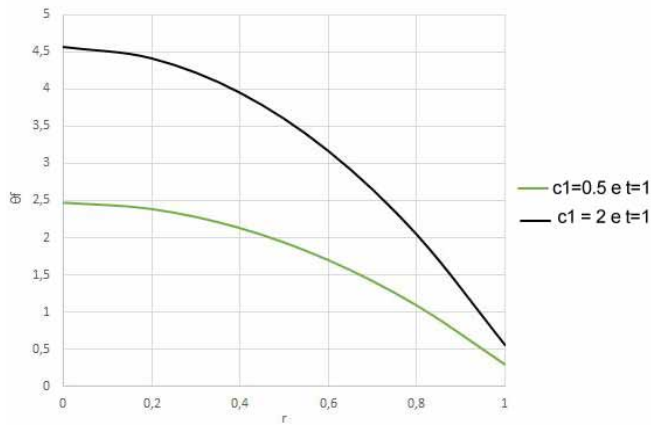
Ao analisar o gráfico da Figura 4, percebe-se que para um mesmo instante de tempo, a temperatura é máxima no centro da vareta combustível e diminui ao longo da direção radial. Tal fato é esperado, pois na superfície do cilindro acontece um resfriamento convectivo. Além disso, observa-se que o perfil de temperatura local aumenta à medida que o tempo cresce, devido ao fluxo de nêutrons descontrolado, que eleva continuamente o termo de geração de calor do combustível. Claramente, quanto mais próximo da superfície da vareta combustível, menor é a variação da temperatura entre um tempo posterior e anterior.

Outro ponto a ser destacado é com relação a constante  $c_1$ , quanto maior o valor desta, maiores temperaturas locais são observadas na vareta combustível, conforme esperado, já que ao aumentar  $c_1$ , eleva-se o termo fonte de calor variável, expressado pelo caso 1, Eq. (49). Tal fato, pode ser observado na Figura 5.

O gráfico da Figura 6 é similar ao da Figura 4, porém para a variação do termo fonte de calor proposto no caso 2. Novamente, a fim de validar a modelagem desenvolvida neste trabalho e verificar a influência da região do revestimento, a solução elaborada foi comparada com [6].



**Fig. 4 –** Perfil de temperatura para o caso 1 com  $Bi=15$  e  $c_f=0,5$ , em diferentes instantes de tempo.

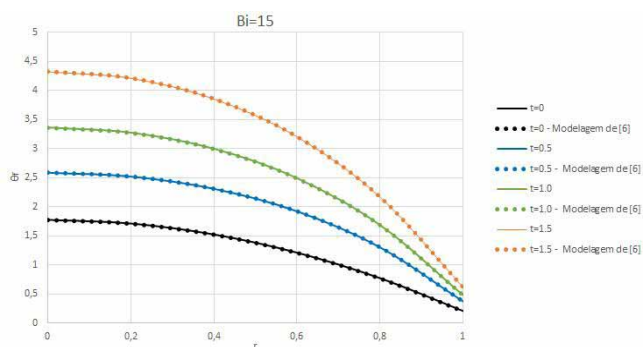


**Fig. 5** – Perfil de temperatura para o caso 1 com  $Bi=15$ , para diferentes valores de  $c_1$  em  $t=1$ .

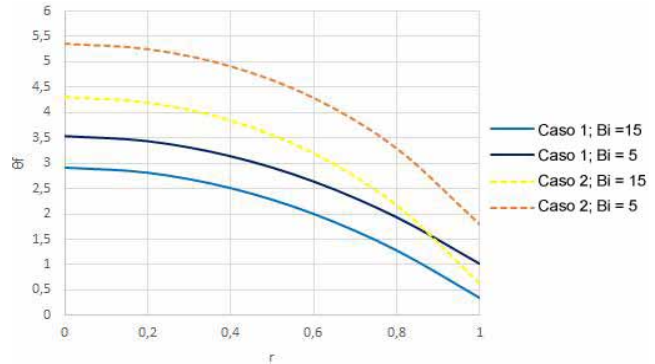
Observa-se que assim como aconteceu para a variação do termo fonte proposto no caso 1, para o caso 2, Eq. (50), os resultados foram idênticos aos obtidos pela solução dos autores [6] para esta mesma variação de termo fonte, conforme pode ser visto na Figura 6. Tal fato reitera que a região do material de revestimento não possui influência significativa no problema térmico da vareta combustível.

Além disso, observa-se a mesma tendência já discutida para a temperatura local ao longo da direção radial do cilindro. Vale ressaltar que assim como aconteceu com a constante  $c_1$ , ao aumentar o valor das constantes  $c_2$  e  $c_3$ , eleva-se o termo de geração de calor e, novamente, maiores temperaturas locais são observadas. Entretanto, uma ressalva precisa ser feita para o caso 2: o termo fonte de calor proposto passa a ser não uniforme na direção radial do elemento combustível, sendo que a geração de calor aumenta à medida que o raio do cilindro cresce, e então, a superfície do cilindro passa a ser o local com maior geração de calor. Neste contexto, se aumentar largamente o valor da constante  $c_2$ , maior será o peso da posição radial no aumento do termo fonte de calor, e consequentemente, observa-se que à medida que o tempo cresce, maiores temperaturas são vistas nas regiões intermediárias do elemento, pois apesar da superfície apresentar um termo de geração maior, nesta posição acontece um resfriamento convectivo. Tal situação foi observada no trabalho de [4].

A Figura 7 mostra a influência do número de Biot no perfil de temperatura adimensional ao longo da direção radial da vareta combustível em  $t=1,5$ , para os casos discutidos neste trabalho.



**Fig. 6** – Perfil de temperatura para o caso 2 com  $Bi=15$ ,  $c_2=1$  e  $c_3=0,5$  em diferentes instantes de tempo.



**Fig. 7** – Influência do número de Biot no perfil de temperatura local para  $t=1,5$ .

As curvas sólidas são relativas ao termo fonte de calor variável proposto pelo caso 1 com  $c_1=0,5$ , e para  $Bi=15$  e  $Bi=5$ , enquanto que as curvas tracejadas representam o caso 2 com  $c_2=1$  e  $c_3=0,5$ , e também para  $Bi=15$  e  $Bi=5$ . Observa-se que para ambos os casos, o perfil de temperatura local é menor para a análise com maior número de Biot. Evidentemente, este comportamento é esperado, já que quanto maior o número de Biot, maior é a transferência de calor por convecção junto a superfície do elemento combustível, logo menores temperaturas são observadas na vareta combustível.

O número de Biot é um parâmetro adimensional, definido neste trabalho pela Eq. (25). De acordo com [7], soluções analíticas exatas para condução transiente em sólidos planos, cilíndricos ou esféricos, submetidos a resfriamento convectivo, mostram que para  $Bi < 0,1$ , a variação de temperatura no sólido durante o transiente é menor que 5%, ou seja, gradientes de temperatura suaves. Logo, conclui-se que a análise por parâmetros concentrados pode ser utilizada para a maioria das aplicações de engenharia se o número de Biot for menor que 0,1.

Tal fato pode causar estranheza, pois neste trabalho utilizou o conceito de parâmetros concentrados e os resultados estão sendo apresentados para um  $Bi=15$ . A análise por parâmetros concentrados foi utilizada apenas para a região do material de revestimento e não para todo o domínio radial da vareta combustível, portanto, para validar a modelagem por parâmetros concentrados feita neste trabalho, vamos definir um número de Biot do revestimento, sendo dado por:

$$Bi_c = \frac{hR_c}{k_c} \quad (51)$$

Note que o número de Biot do revestimento já foi mencionado durante o desenvolvimento matemático e precisa ser bem menor que 1, condição vista na Eq. (8) e que precisa ser satisfeita para a aplicação da modelagem desenvolvida. Obviamente, os resultados apresentados com  $Bi=15$  não devem causar estranheza. Para este número de Biot, o coeficiente de transferência de calor  $h$  é avaliado através da Eq. (25) em  $8993,58 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Com  $h$  determinado, avalia-se o número de Biot do revestimento através da Eq. (51), obtendo  $Bi_c=0,16$ .

Portanto, dentro do que é visto em [7], o número de Biot do revestimento está dentro da faixa válida para utilizar o conceito por parâmetros concentrados sem maiores perdas na modelagem desenvolvida, e então, não há nenhuma anormalidade nos resultados apresentados para  $Bi=15$ . Evidentemente, para números de Biot menores que 15, a validação é ainda melhor.

O gráfico da Figura 8 mostra a variação do tempo crítico em função do número de Biot. Para o caso 1 utilizou-

-se  $c_1=0,5$ ; para o caso 2 empregou-se  $c_2=1$  e  $c_3=1$ . O tempo crítico é definido como o período requerido para que o material de revestimento atinja a sua temperatura de fusão, que segundo [3], é igual à 1877 °C. Ao comparar os resultados deste trabalho com a solução de [6], obtiveram-se resultados idênticos, o que mostra que as análises considerando ou não a região do material de revestimento levam a tempos críticos idênticos, como não podia ser diferente dentro dos resultados que vêm sendo apresentados.

A análise da Figura 8 reitera a influência do número de Biot com relação ao perfil de temperatura local na vareta combustível. Conforme já mencionado, à medida que o número de Biot aumenta, o perfil de temperatura no cilindro diminui e, conseqüentemente, um maior período de tempo será necessário para que o revestimento atinja a sua temperatura de fusão. Portanto, à medida que o número de Biot cresce, o tempo crítico aumenta. Tal fato pode ser observado no gráfico da Figura 8, principalmente para o caso 1. Percebe-se que, para o caso 2, o aumento do número de Biot não garante uma diminuição significativa do tempo crítico. Além disso, a Figura 8 sugere que é mandatório ter uma precisa variação do termo fonte de calor, pois os casos analisados levaram à tempos críticos muitos distintos.

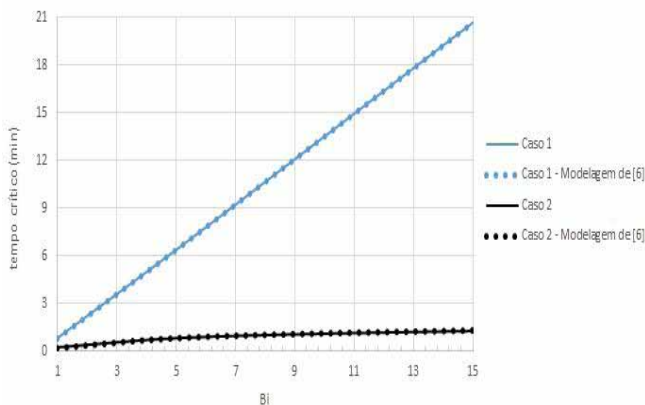


Fig. 8 – Variação do tempo crítico em função do número de Biot.

#### 4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma solução analítico-numérica para a transferência de calor transiente por condução com termo fonte de calor variável em varetas combustíveis de reatores nucleares. O problema transiente é ocasionado por um fluxo descontrolado de nêutrons, que faz com que o termo fonte de calor passe a ser variável. Dentro deste contexto, a modelagem desenvolvida é extremamente útil, pois independente da variação do termo fonte de geração de calor proposta, o perfil de temperatura transiente pode ser obtido.

Um dos grandes interesses deste trabalho foi verificar a influência da região do material de revestimento na transferência de calor por condução na vareta combustível. Neste aspecto, viu-se que a região do material de revestimento não apresenta maiores influências térmicas na transferência de calor por condução da vareta combustível, já que os resultados comparados nas análises, considerando ou não a região do material de revestimento, apresentaram grande concordância.

No trabalho dos autores [3] foi visto que o modelo utilizando o conceito dos parâmetros concentrados não apresentava resultados precisos para elevados coeficiente de transfe-

rência de calor e, então, a solução precisava ser desenvolvida para aumentar a sua aplicabilidade. Uma excelente contribuição da modelagem vista aqui neste trabalho é que da forma como se aplicou o conceito dos parâmetros concentrados, apenas para a região do material de revestimento, é possível utilizar a solução para elevados coeficientes de transferência de calor por convecção, conforme visto nos resultados apresentados, onde utilizou-se  $h=8993,58$  W/m<sup>2</sup>K.

Ademais, foi visto que o número de Biot pode desempenhar um importante papel a fim de aumentar o tempo crítico, o que pode ser um aspecto interessante a fim de evitar um acidente nuclear. Viu-se também que a solução baseada na expansão das autofunções apresenta rápida convergência para o transiente de interesse.

#### 5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao IME e a CAPES pelo apoio na realização deste trabalho.

#### 6 NOMENCLATURA

$R$	Raio do elemento em análise, m
$A$	Área, m <sup>2</sup>
$V$	Volume, m <sup>3</sup>
$e$	Altura da vareta combustível, m
$R_t$	Resistência térmica, K/W
$q$	Taxa de calor, W
$\varepsilon$	Parâmetro adimensional relativo ao comprimento do combustível e do revestimento
$G$	Termo fonte de calor volumétrico, W/m <sup>3</sup>
$g$	Termo fonte de calor volumétrico variável, W/m <sup>3</sup>
$G^*$	Termo fonte de calor adimensional uniforme
$G'$	Termo fonte de calor adimensional variável
$h$	Coefficiente de transferência de calor, W/m <sup>2</sup> K <sup>-1</sup>
$k$	Condutividade térmica, W/mK <sup>-1</sup>
$\rho$	Massa específica, Kg/m <sup>3</sup>
$C_p$	Calor específico à pressão constante, J/KgK <sup>-1</sup>
$\alpha$	Difusividade térmica, m <sup>2</sup> /s
$\mu$	Parâmetro adimensional referente à razão entre calor e massa específica
$T$	Temperatura, °C
$\theta$	Temperatura adimensional
$t'$	Coordenada temporal, s
$r'$	Coordenada especial, m
$t$	Coordenada temporal adimensional
$r$	Coordenada espacial adimensional
$Bi$	Número de Biot
$\beta_m$	Autovalores
$R_0(\beta_m)$	Autofunção
$N(\beta_m)$	Norma
$A_m(t)$	Coefficientes temporais
$\bar{\theta}_m(t)$	Temperatura adimensional transformada
$\bar{G}_m(\bar{t})$	Termo fonte transformado
$\bar{f}_n$	Parâmetro auxiliar do problema de autovalor
$\bar{g}$	Parâmetro auxiliar do problema de autovalor
$A_{mn}$	Parâmetro auxiliar do problema de autovalor

## 7 SUBSCRITOS

- c Revestimento (cladding)
- f Combustível (fuel)
- co Superfície externa do revestimento
- int Interno
- ext Externo
- conv Convecção

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Eskandari, M.R; Bavandi, A.; Mihandoost, A. 2012. Studies on Nuclear Fuel Rod Thermal Performance. *Energy Procedia* 14 (2012) 142-147.
- [2] Moreira, F. C. Análise de Condução de Calor com Mudança de Fase em uma Vareta Combustível Nuclear / Felipe Celestino Moreira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013. XV, 106 p.: il.; 29,7cm.
- [3] An, C.; Moreira, F. C.; Su, J. 2014. Thermal analysis of the melting process in a nuclear fuel rod. *Applied Thermal Engineering* 68 (2014) 133-143.
- [4] Bhattacharya, S.; Nandi, S.; DasGupta, S; Sirshendu, D. 2001. "Analytical Solution of Transient Heat Transfer with Variable Source for Applications in Nuclear Reactors". *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, N. 7, pp. 1005-1013, 2001.
- [5] IAEA (2007). Computational analysis of the behaviour of nuclear fuel under steady state, transient and accident conditions december. International Atomic Energy Agency, Vienna.
- [6] F. A. Soares, P. P. Araújo, R. O. C. Guedes, F. Scofano Neto. 2017. Analytical solution for the transient heat transfer problem with variable source term in a nuclear fuel rod. In submission for the COBEM 2017.
- [7] Ozisik, M. N. 1993. *Heat Conduction*. M. Necati Ozisik. – 2<sup>nd</sup> ed., Wiley, New York, 716p.
- [8] Gilat, A. 2008. *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas [recurso eletrônico]: uma introdução com aplicações usando o MATLAB / Amos Gilat, Vish Subramaniam; tradução Alberto Resende de Conti. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: Bookman, 2008.*
- [9] N. E. Todreas, M.S. Kazimi, *Nuclear Systems I: Thermal Hydraulic Fundamentals*, Hemisphere Pub. Corp., New York, 1990.