

Controle de quadricóptero via linearização por realimentação robusta associada à síntese H_∞

Vinícius M G B Cavalcanti*, Alberto M Simões
Instituto Militar de Engenharia
Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270
Rio de Janeiro, RJ, Brasil
vinicius.cavalcanti@gmail.com

RESUMO: O presente trabalho trata do projeto de uma lei de controle para o modelo não linear de um quadricóptero sujeito a incertezas paramétricas. O sistema de controle é projetado por meio da combinação de técnicas de linearização por realimentação com a síntese H_∞ . Os resultados das simulações numéricas indicam que a associação de uma lei de linearização por realimentação a um controlador robusto é eficiente para a regulação de sistemas dinâmicos não lineares, operando longe do ponto de equilíbrio. Também é observado que, para uma certa classe de sistemas não lineares, existe equivalência entre as técnicas de linearização por realimentação consideradas.

PALAVRAS-CHAVE: Linearização por realimentação. Síntese H_∞ . Controle de quadricóptero

ABSTRACT: This work deals with the design of controller for the quadrotor nonlinear model subject to parametric uncertainties. The control system is designed by means of feedback linearization techniques combined with H_∞ synthesis. Numerical simulation results indicate that the association of a feedback linearization law and a robust controller is efficient for the regulation of nonlinear dynamics operating far from the equilibrium point. It is also observed that for a certain class of nonlinear systems there is an equivalence between the feedback linearization techniques considered.

KEYWORDS: Feedback linearization. H_∞ synthesis. Quadrotor control.

Notação

H_∞	espaço de Hardy com norma- ∞
W^m	espaço de Sobolev
$ad_f^n g$	colchete de Lie de ordem n de g com respeito a f
$\mathcal{L}_f^n g$	derivada de Lie de ordem n de g com respeito a f
$\gamma_{Wl}(G)$	ganho W do operador não linear G
$\inf(S)$	ínfimo do conjunto S
\mathcal{F}_l	LFT inferior
$span\{x_1, \dots, x_n\}$	subespaço vetorial gerado por x_1, \dots, x_n

1. INTRODUÇÃO

O controle de sistemas não lineares via linearização por realimentação clássica (CFL, do inglês *Classical Feedback Linearization*) [1]-[2] apresenta algumas limitações importantes. Além do fato da dinâmica linearizada em geral perder relação com a interpretação física do problema original, talvez o mais grave seja o fato de a técnica não conseguir lidar satisfatoriamente com incertezas no modelo.

Baseado no conceito de W -estabilidade introduzido em [4]-[3], foi proposta em [5] uma linearização por realimentação robusta (RFL, do inglês *Robust Feedback Linearization*), como forma de superar as limitações da linearização clássica, citadas acima. A idéia central da RFL consiste em transformar o sistema não linear original em sua

aproximação linear (Jacobiana) em torno de um dado ponto de operação. Desse modo, a combinação com uma lei de controle linear robusta em uma malha externa permite preservar as propriedades de robustez desta última.

Em [6], a efetividade da RFL é corroborada através da sua combinação com uma lei de controle H_∞ baseada na técnica de *loop-shaping* de Glover e McFarlane [7]. A principal vantagem desse método é que ele não requer a obtenção de uma representação linear fracionária para a planta não linear.

No presente trabalho, a abordagem citada, conjugando a RFL e uma lei de controle H_∞ , é utilizada no controle de um dispositivo quadricóptero. Os resultados da aplicação numérica indicam que esta técnica é eficiente para o controle de sistemas não lineares operando afastados do ponto de equilíbrio. Também é observado, que para uma certa classe de sistemas não lineares, como por exemplo, o quadricóptero, existe equivalência entre a RFL e a CFL.

2. LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO

Considere o sistema não linear invariante no tempo com múltiplas entradas

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad (1)$$

$$y_i = h_i(x), \quad (2)$$

onde $f(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_m(x)$ são campos vetoriais suaves, e $h_1(x)$, ..., $h_m(x)$ são funções suaves, definidas num subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Note que o sistema é não

linear no vetor de estados $x \in \mathbb{R}^n$, e linear no vetor de entradas $u \in \mathbb{R}^m$.

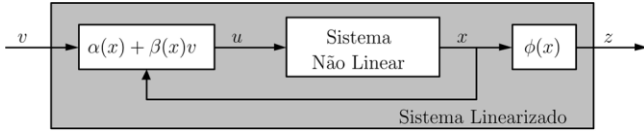


Fig. 1 – Linearização por realimentação.

Com a linearização por realimentação, vide Fig. 1, visa-se encontrar uma transformação de coordenadas, dada por um difeomorfismo $\phi(x)$, funções suaves $\alpha_i(x)$ e $\beta_{ij}(x) \in \mathbb{R}^n$, com $1 \leq i, j \leq m$, de forma que se

$$u_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{ji}(x)v_j, \quad (3)$$

$$z \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x), \quad (4)$$

então as variáveis resultantes z e v satisfazem a equação de estados linear

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad (5)$$

na qual o par (A, B) é controlável. Se essa mudança de variáveis for possível, diz-se que o sistema (1)-(2) é linearizável por realimentação.

Uma vez definido o problema da linearização por realimentação, uma questão que naturalmente se coloca é o da existência, ou seja, da linearizabilidade por realimentação da equação de estado não linear. Para obtenção de uma condição de linearizabilidade, estabelece-se adequadamente distribuições geradas por campos vetoriais na forma

$$D_i \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{ad_f^k g_j : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\}, \forall 0 \leq i \leq n - 1. \quad (6)$$

O Teorema a seguir apresenta condições necessárias e suficientes à linearização por realimentação.

Teorema 1 [1]: Seja a matriz $g(x_0)$ com posto m .

Então, a linearização por realimentação do sistema (1)-(2) é possível se e somente se

- A distribuição D_i tenha dimensão constante, ao redor de x_0 , para cada $0 \leq i \leq n - 1$;
- A distribuição D_{n-1} tenha dimensão n ; e
- A distribuição D_i seja involutiva para cada $0 \leq i \leq n - 2$.

2.1 Linearização por realimentação clássica

A CFL é realizada através da lei de controle

$$u_c = \alpha_c(x) + \beta_c(x)v_c, \quad (7)$$

e mudança de coordenadas

$$z_c = \phi_c(x). \quad (8)$$

Conforme discutido em [1], a mudança de coordenadas (7)-(8), se possível, tem a forma

$$[\mathcal{L}_f^0 h_1(x) \cdots \mathcal{L}_f^{r_1-1} h_1(x) \cdots \mathcal{L}_f^{r_m-1} h_m(x)]^T, \quad (9)$$

$$\alpha_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} -M^{-1}(x) \begin{bmatrix} \mathcal{L}_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\beta_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} M^{-1}(x), \quad (11)$$

onde

$$M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & \mathcal{L}_{g_m} \mathcal{L}_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & \mathcal{L}_{g_m} \mathcal{L}_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

O sistema linearizado

$$\dot{z}_c = A_c z_c + B_c v_c, \quad (13)$$

$$y_c = C_c z_c, \quad (14)$$

está na forma canônica de Brunovsky.

2.2 Linearização por realimentação robusta

A RFL é realizada através da lei de controle

$$u_r = \alpha_r(x) + \beta_r(x)v_r, \quad (15)$$

e mudança de coordenadas

$$z_r = \phi_r(x). \quad (16)$$

Conforme discutido em [5], a mudança de coordenadas (15)-(16), se possível, tem a forma

$$\phi_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1} \phi_c(x), \quad (17)$$

$$\alpha_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_c(x) + \beta_c(x) L T^{-1} \phi_c(x), \quad (18)$$

$$\beta_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_c(x) R^{-1}, \quad (19)$$

com

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (20)$$

$$L \stackrel{\text{def}}{=} -M(0) \frac{\partial \alpha_c(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (21)$$

$$R \stackrel{\text{def}}{=} M^{-1}(0). \quad (22)$$

O sistema linearizado

$$\dot{z}_r = A_r z_r + B_r v_r, \quad (23)$$

$$y_r = C_r z_r, \quad (24)$$

corresponde à linearização Jacobiana da equação não linear em torno da origem.

2.3 W-estabilidade

Em um primeiro momento, não parece haver grandes diferenças entre a CFL e a RFL, dado que esta pode ser obtida a partir daquela. Entretanto, conforme discutido no texto a seguir, o fato do sistema linearizado via RFL ser equivalente àquele obtido pela linearização jacobiana revela-se de grande relevância de um ponto de vista da robustez do sistema em malha fechada.

Utilizando o espaço W^n , também conhecido como espaço de Sobolev, uma estabilidade do tipo entrada-saída de um sistema não linear é caracterizada em [3].

A norma de x em W^n é definida como

$$\|x\|_W \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_0^\infty x^T(t)x(t)dt + \int_0^\infty \dot{x}^T(t)\dot{x}(t)dt}. \quad (25)$$

Seja $G : W^n \rightarrow W^m$ um sistema não linear invariante no tempo descrito por

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (26)$$

$$y = H(x, u), \quad (27)$$

com ponto de equilíbrio $(x, u) = (0, 0)$, e

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \{k > 0, \exists \epsilon > 0: \|Gu\|_W \leq k\|u\|_W, \forall u \in W^n \mid \|u\|_W < \epsilon\}. \quad (28)$$

Se K é não vazio, diz-se que G é localmente W -estável e

$$\gamma_{Wl}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \inf(K) \quad (29)$$

é o ganho W local de G .

Suponha agora que $G(s) \square C(sI - A)^{-1} + D$ representa a matriz de transferência associada à aproximação linear de G em (26)-(27) em torno do ponto de equilíbrio, de modo que

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{0,0}, B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{0,0}, C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{0,0}, D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{0,0}. \quad (30)$$

O resultado, no Teorema 2, a seguir, é central no presente trabalho.

Teorema 2 [4]: Assuma que A, B, C e D definidos como em (30) e que o par (A, B) seja controlável, o par (C, A) seja detectável e $G(s) \square H_\infty$. Então, G é localmente W -estável e

$$\gamma_{Wl}(G) = \|G(s)\|_\infty. \quad (31)$$

Uma forma de interpretar o Teorema 2 é notar que o ganho W local de um sistema não linear invariante no tempo nada mais é do que a norma H_∞ da função de transferência de sua aproximação linear. Com este fundamento, é possível obter uma versão local para o Teorema do Ganho Pequeno [8], indicada no Teorema a seguir.

Teorema 3 [4]: Seja o sistema em malha fechada padrão apresentado na Fig. 2, onde $G_1 : W^m \rightarrow W^m$ e $G_2 : W^m \rightarrow W^n$. Assumindo que este sistema é bem posto [9], existem dois operadores H_1 e $H_2 : W^{n+m} \rightarrow W^{n+m}$ tais que

$$e = H_1 u e y = H_2 u \quad (32)$$

com

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Então se

$$\gamma_{Wl}(G_1)\gamma_{Wl}(G_2) < 1, \quad (34)$$

então o sistema em malha fechada é localmente W -estável.

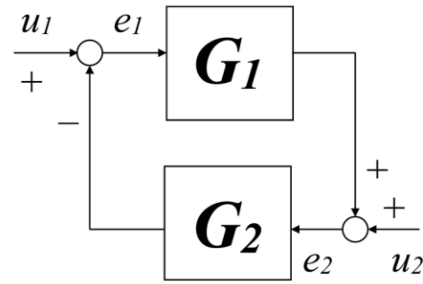


Fig. 2 – Sistema em malha fechada padrão.

O principal resultado desta seção é apresentado no Teorema a seguir.

Teorema 4 [5]: Considere o sistema na Fig. 3 onde a planta não linear P é dada por

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_\Delta + g_2(x)u, \quad (35)$$

$$y_\Delta = h(x) + k_1(x)u_\Delta + k_2(x)u, \quad (36)$$

$$y = x. \quad (37)$$

Suponha que $f(x)$ e $g_2(x)$ satisfaçam as condições do Teorema 1, de modo que existe a linearização por realimentação dada por (17)-(19). Se o controlador K estabiliza a planta nominal $P(s)$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_1\hat{u}_\Delta + B_2\hat{u} \\ P(s): \hat{y} &= C\hat{x} + D_1\hat{u}_\Delta + D_2\hat{u}, \\ \hat{y} &= \hat{x} \end{aligned} \quad (38)$$

com

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0}, C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (39)$$

$$B_1 \stackrel{\text{def}}{=} g_1(0), B_2 \stackrel{\text{def}}{=} g_2(0), \quad (40)$$

$$D_1 \stackrel{\text{def}}{=} k_1(0), D_2 \stackrel{\text{def}}{=} k_2(0), \quad (41)$$

e satisfaz

$$\|\mathcal{F}_l(P(s), K)\|_\infty < \frac{1}{8}, \quad (42)$$

então a planta não linear nominal em malha fechada $T(A, K)$ é localmente W -estável e

$$\gamma_{Wl}(T(A, K)) < \frac{1}{8}. \quad (43)$$

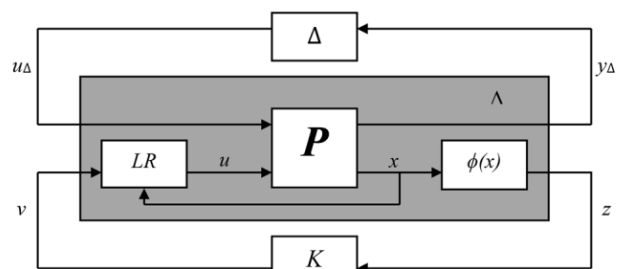


Fig. 3 – Configuração geral de controle com incertezas e linearização por realimentação.

Pode se concluir dos Teoremas 3 e 4, que a lei de controle combinando a RFL e o controlador linear K , definidos anteriormente, garantem a W -estabilidade local do sistema não linear em malha fechada para toda incerteza não linear Δ satisfazendo $\gamma_{Wl}(\Delta) \leq \delta$. Deste modo, as propriedades de

[10]. A fatoração coprima normalizada à direita de $G(s)$ é dada por

$$G(s) \stackrel{\text{def}}{=} N_R(s) M_R^{-1}(s), \quad (44)$$

onde $N_R(s)$ e $M_R(s)$ são matrizes de transferência coprima estáveis.

3.2 Estabilização robusta

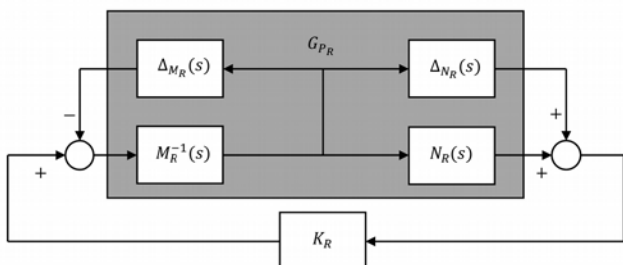


Fig. 4 – Sistema linear perturbado com fatoração coprima normalizada à direita.

Considere o problema ilustrado na Fig. 4 da estabilização robusta da planta incerta baseada na fatoração à direita

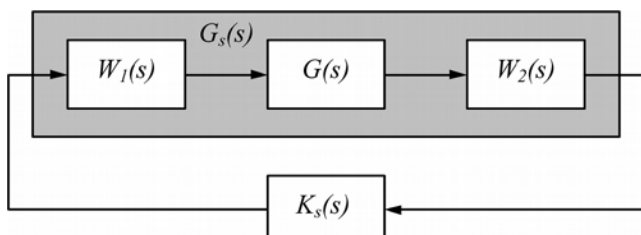
$$G_{P_R}(s) = \left\{ (N_R(s) + \Delta_{N_R}(s))(M_R(s) + \Delta_{M_R}(s))^{-1} : \begin{bmatrix} \Delta_{N_R} \\ \Delta_{M_R} \end{bmatrix} < \varepsilon \right\}. \quad (45)$$

O objetivo da estabilização robusta é projetar um controlador que estabilize o sistema em malha fechada, não apenas para a planta nominal $G(s)$, mas para toda incerteza admissível.

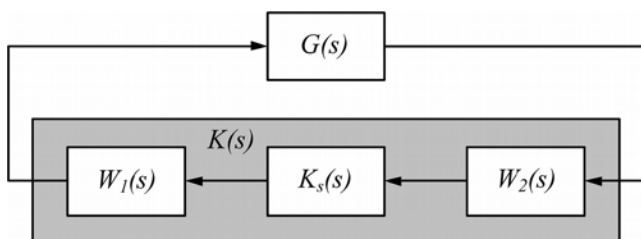
A condição para estabilidade robusta é dada por

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\| M_R^{-1}(s) (I - K_R G_{P_R}(s))^{-1} \begin{bmatrix} K_R(s) & I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\varepsilon}. \quad (46)$$

3.3 Loop-shaping



(a) Perspectiva para síntese.



(b) Perspectiva da planta.

Fig. 5 – Planta com loop-shaping e controlador.

Estabilidade robusta apenas pode não ser de muita utilidade na prática, pois normalmente deseja-se também especificar o desempenho do sistema em malha fechada. Para tanto, em [7] é proposta a introdução de pré-

compensação e pós-compensação à planta de maneira que a resposta frequencial do sistema em malha aberta seja satisfatória. A esta técnica dá-se o nome de *loop-shaping*.

Se W_1 e W_2 são um pré-compensador e um pós-compensador respectivamente, então a planta aumentada é dada por

$$G_s(s) \stackrel{\text{def}}{=} W_2(s) G(s) W_1(s), \quad (47)$$

como mostrado na Fig. 5.

O controlador $K_s(s)$ é sintetizado ao se resolver o problema de estabilização robusta para o sistema aumentado $G_s(s)$ com fatoração coprima normalizada. Então, o controlador final para a planta $G(s)$ será dado por

$$K(s) = W_1(s) K_s(s) W_2(s). \quad (48)$$

4. CONTROLE NÃO LINEAR ROBUSTO

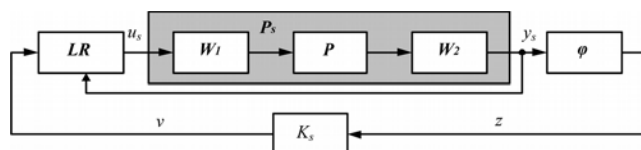


Fig. 6 – Loop-shaping do sistema não linear.

Considere, agora, o sistema não linear aumentado P_s conforme ilustrado na Fig. 6.

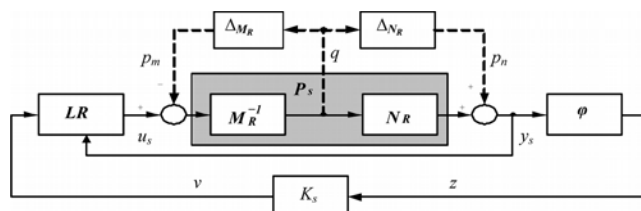


Fig. 7 – Sistema não linear perturbado com fatoração coprima normalizada à direita.

Teorema 5 [6]: O controlador K_s obtido pelo método de loop-shaping de Glover-McFarlane da Seção 3 para o sistema aumentado linearizado $P_s(s)$, combinado à linearização por realimentação robusta e aplicado ao sistema não linear P_s , como na Fig. 7, assegura que o sistema não linear em malha fechada é localmente W -estável para as incertezas tais que

$$\gamma_{W1} \left(\begin{bmatrix} \Delta_{N_R} \\ \Delta_{M_R} \end{bmatrix} \right) < \varepsilon \quad (49)$$

onde ε é a margem de estabilidade local associada à malha fechada e o controlador não linear para o sistema P é dado pela combinação do controlador linear calculado para a aproximação linear $P(s)$ de (48) com a linearização por realimentação robusta.

4.1 Caso particular

Será mostrado a seguir que, sob certa hipótese, as funções de transferências dos sistemas linearizados pelas linearizações por realimentação clássica e robusta estão relacionadas por uma simples transformação linear. Nesse caso, as mesmas propriedades de robustez podem ser alcançadas, independentemente de qual das duas técnicas se

calculado para a aproximação linear $P(s)$ de (48) com a RFL.

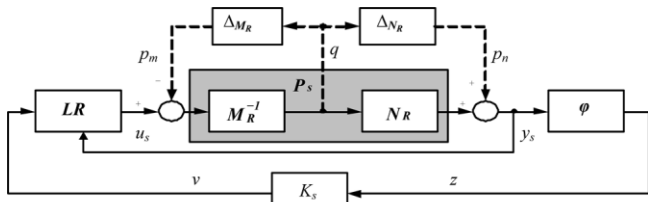


Fig. 7 – Sistema não linear perturbado com fatoração coprima normalizada à direita.

4.1 Caso particular

Será mostrado a seguir que, segundo com certa hipótese, as funções de transferências dos sistemas linearizados por CFL e RFL estão relacionadas por uma simples transformação linear. Nesse caso, as mesmas propriedades de robustez podem ser alcançadas, independentemente de qual das duas técnicas, se utilize, bastando escolher compensadores adequados para o *loop-shaping*.

Proposição 1: *Suponha que o sistema não linear (1)-(2) atende ao Teorema 1, ou seja, é linearizável por realimentação. Seja*

$$G_c(s) \stackrel{\text{def}}{=} C_c(sI - A_c)^{-1}B_c, \quad (50)$$

a função de transferência do sistema (13)-(14) obtido pela CFL, e

$$G_r(s) \stackrel{\text{def}}{=} C_r(sI - A_r)^{-1}B_r, \quad (51)$$

a função de transferência do sistema (23)-(24) obtido pela RFL. Se

$$\frac{\partial \alpha_c(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (52)$$

então

$$G_r(s) = T^{-1}G_c(s)R^{-1}, \quad (53)$$

com as matrizes T e R dadas pelas equações (20) e (22), respectivamente.

Prova: Inicialmente, sabe-se que

$$z_c(s) = G_c(s)v_c(s), \quad (54)$$

e que

$$z_r = T^{-1}z_c(s), \quad (55)$$

$$v_c(s) = LT^{-1}z_c(s) + R^{-1}v_r(s), \quad (56)$$

Substituindo-se (56) em (54), tem-se que

$$z_c(s) = G_c(s)[LT^{-1}z_c(s) + R^{-1}v_r(s)] \quad (57)$$

$$= [I - G_c(s)LT^{-1}]^{-1}G_c(s)R^{-1}v_r(s). \quad (58)$$

Substituindo-se, em seguida, (58) em (55), tem-se que

$$z_r(s) = T^{-1}[I - G_c(s)LT^{-1}]^{-1}G_c(s)R^{-1}v_r(s). \quad (59)$$

Logo, a função de transferência da RFL pode ser obtida como

$$G_r(s) = T^{-1}[I - G_c(s)LT^{-1}]^{-1}G_c(s)R^{-1}. \quad (60)$$

Se (52) é atendida, então de (21) conclui-se que $L=0$. Por conseguinte, obtém-se (53).

Note que, no caso em que (52) é atendida, e portanto $L=0$, as leis da RFL (17)-(19) se reduzem a

$$\phi_r(x) = T^{-1}\phi_c(x), \quad (61)$$

$$\alpha_r(x) = \alpha_c(x), \quad (62)$$

$$\beta_r(x) = \beta_c(x)R^{-1}. \quad (63)$$

Suponha agora que um controlador linear K_r tenha sido projetado para o sistema linearizado via RFL, de modo que

$$v_r = K_r z_r. \quad (64)$$

Considere ainda que existe um canal de incerteza de u_Δ para y_Δ . Então, a dinâmica incerta do sistema não linear em malha fechada com a RFL e controlador K_r é dada por

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_\Delta + g_2(x)(\alpha_r(x) + \beta_r(x)K_r\phi_r(x)), \quad (65)$$

$$y_\Delta = h(x) + k_1(x)u_\Delta + k_2(x)(\alpha_r(x) + \beta_r(x)K_r\phi_r(x)). \quad (66)$$

Substituindo (61)-(63) em (65)-(66) tem-se

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_\Delta + g_2(x)\alpha_c(x) + \beta_c(x)R^{-1}K_rT^{-1}\phi_c(x), \quad (67)$$

$$y_\Delta = h(x) + k_1(x)u_\Delta + k_2(x)(\alpha_c(x) + \beta_c(x)R^{-1}K_rT^{-1}\phi_c(x)). \quad (68)$$

que pode ser interpretada, de forma equivalente, como a dinâmica do sistema não linear em malha fechada com a CFL e com um controlador K_c dado por

$$K_c \stackrel{\text{def}}{=} R^{-1}K_rT^{-1}. \quad (69)$$

Este resultado será útil no projeto do controlador do quadricóptero, a ser discutido na seção 6, uma vez que esse sistema atende à condição da Proposição 1.

5. DINÂMICA DO QUADRICÓPTERO

Na Fig. 8, são representados os referenciais considerados na modelagem da dinâmica de um quadricóptero.

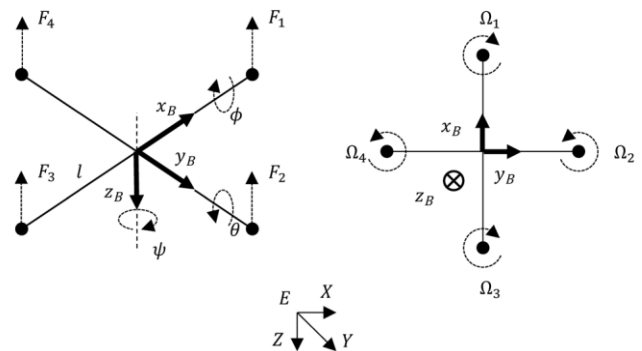


Fig. 8 – Sistema de referenciais do quadricóptero.

O vetor de variáveis de estados é dado por

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} [XYZ\psi\theta\phi\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}pqr]^T, \quad (70)$$

onde X , Y e Z são as coordenadas e \dot{X} , \dot{Y} , \dot{Z} as velocidades lineares do centro de massa do quadricóptero em relação ao referencial inercial E , ψ , θ e ϕ são os ângulos de Euler, e p , q e r são as velocidades angulares em relação ao referencial do corpo.

O vetor de entrada, por sua vez, é determinado a partir das velocidades angulares Ω_i , $i = \{1, \dots, 4\}$, dos rotores, segundo a equação

$$u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} U \\ \tau_X \\ \tau_Y \\ \tau_Z \\ b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ b(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ b(-\Omega_1^2 + \Omega_3^2) \\ d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{bmatrix}, \quad (71)$$

onde b é um coeficiente de empuxo e d é um coeficiente de arraste.

Com as definições acima, a dinâmica do quadricóptero pode ser finalmente descrita por [11]:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ q \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \theta + r \operatorname{cos} \phi \operatorname{sec} \theta \\ q \operatorname{cos} \phi - r \operatorname{sen} \phi \\ p + q \operatorname{sen} \phi \tan \theta + r \operatorname{cos} \phi \tan \theta \\ \frac{-1}{m} (\operatorname{cos} \phi \operatorname{cos} \psi \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi) U \\ \frac{-1}{m} (\operatorname{cos} \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi - \operatorname{cos} \psi \operatorname{sen} \phi) U \\ g - \frac{1}{m} \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi U \\ \frac{I_Y - I_Z}{I_X} qr + \frac{l}{I_X} \tau_X \\ \frac{I_Z - I_X}{I_Y} pr + \frac{l}{I_Y} \tau_Y \\ \frac{I_X - I_Y}{I_Z} pq + \frac{1}{I_Z} \tau_Z \end{bmatrix}, \quad (72)$$

onde m é a massa do corpo, g é a aceleração gravitacional, I_X , I_Y e I_Z são os momentos de inércia e l é a distância entre o centro de massa e os rotores. Os valores nominais considerados para os parâmetros do sistema, listados na Tabela 1 correspondem ao nanoquadricóptero Crazyflie[®] 1.0.

Tabela 1: Valores nominais dos parâmetros do quadricóptero.

Parâmetro	Valor Nominal
I_x	770 kg.m ²
I_y	770 kg.m ²
I_z	1600 kg.m ²
m	0.02 kg
l	0.02 m
g	9.81 m/s ²

Fonte: [12]

O vetor de saída para a malha de controle externa é dado por

$$y(t) = [XYZ\psi]^T. \quad (73)$$

6. CONTROLE DO QUADRICÓPTERO

A dinâmica descrita pelas Equações (72)-(73) apresenta deficit de grau relativo, e portanto, não admite linearização por realimentação. Entretanto, conforme discutido em [1], sob certas condições, é possível se modificar um sistema que não possui um grau relativo suficiente de modo a se obter um sistema que possua, e isso é possível através de uma realimentação dinâmica de estados. Na presente aplicação, a condição de linearizabilidade por realimentação pode ser obtida através da passagem da ação de controle U por um integrador duplo e a posterior realimentação dos estados associados, conforme representado na Fig. 9.

Utilizando-se o esquema de controle representado pelo diagrama de blocos apresentado na Fig. 9, a dinâmica aumentada do quadricóptero torna-se

$$\hat{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ q \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \theta + r \operatorname{cos} \phi \operatorname{sec} \theta \\ q \operatorname{cos} \phi - r \operatorname{sen} \phi \\ p + q \operatorname{sen} \phi \tan \theta + r \operatorname{cos} \phi \tan \theta \\ \frac{-1}{m} (\operatorname{cos} \phi \operatorname{cos} \psi \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi) (\zeta + m_\xi) \\ \frac{-1}{m} (\operatorname{cos} \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi - \operatorname{cos} \psi \operatorname{sen} \phi) (\zeta + m_\xi) \\ g - \frac{1}{m} \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi (\zeta + mg) \\ \xi \\ \zeta \\ \frac{I_Y - I_Z}{I_X} qr + \frac{l}{I_X} \tau_X \\ \frac{I_Z - I_X}{I_Y} pr + \frac{l}{I_Y} \tau_Y \\ \frac{I_X - I_Y}{I_Z} pq + \frac{1}{I_Z} \tau_Z \end{bmatrix}, \quad (74)$$

onde o vetor de estados aumentado é dado por

$$\hat{\hat{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [XYZ\psi\theta\phi\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}\xi\zeta pqr]^T, \quad (75)$$

e a solução de equilíbrio desse sistema é

$$\hat{\hat{x}}(t) = 0, \quad (76)$$

$$\hat{u}(t) = [u_1 - mg000]^T. \quad (77)$$

O novo modelo dinâmico (74) atende aos critérios de linearização por realimentação. Para essa dinâmica aumentada é, então, projetada uma lei de linearização.

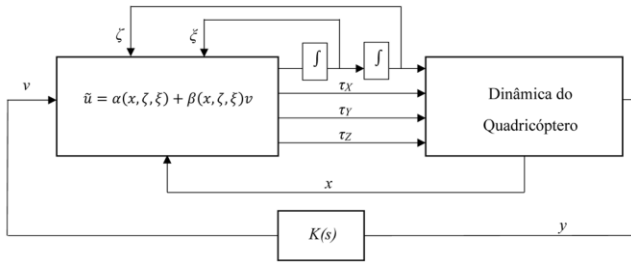


Fig. 9 – Diagrama da realimentação dinâmica.

Por fim, o controlador H_∞ , da malha externa $K(s)$, ilustrado na Fig. 3, é projetado utilizando-se a técnica de *loop-shaping* de Glover e McFarlane [7], explorando-se o resultado da Proposição 1, com a pós-compensação

$$W_r = \begin{bmatrix} \frac{2 \times 10^5 (s+0.1)}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \times 10^5 (s+0.1)}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s+0.1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2 \times 10^3 (s+0.1)}{s} \end{bmatrix} \quad (78)$$

para a RFL, ou

$$W_c = W_r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-gl}{I_Y} \\ 0 & \frac{gl}{I_X} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_Z} \end{bmatrix}, \quad (79)$$

para a CFL.

7. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Numa primeira simulação, é considerado o sistema não linear nominal controlado pela combinação de uma das leis de linearização, CFL ou RFL, com o respectivo controlador H_∞ e é averiguado que ambas apresentam a mesma resposta temporal. Nesta simulação, o sistema parte com um ângulo de arfagem inicial de 1 rad e retorna ao ponto de equilíbrio. A resposta temporal dos estados X, Y, Z, ψ, θ e ϕ no caso nominal é mostrada na Fig. 10.

Em seguida, considera-se o sistema não linear nominal controlado apenas pelo controlador H_∞ , isto é, sem uma lei de linearização por realimentação. O resultado é apresentado na Fig. 11. Neste caso, o sistema se torna instável, e não retorna para o ponto de equilíbrio ao se aplicar um distúrbio na direção do ângulo de arfagem.

Por último, realiza-se um experimento no qual o sistema encontra-se em uma condição inicial correspondente a um ângulo de arfagem de 45° e um ângulo de rolagem de 30°, enquanto que os outros estados são nulos. O objetivo desse experimento é avaliar o comportamento da lei de controle durante a regulação até a origem do sistema sujeito a incertezas paramétricas. Supõe-se que os parâmetros I_X, I_Y, I_Z e m apresentam variação de até ±14% em relação aos valores nominais na Tabela 1. Além disso delimita-se a faixa de

operação de atitude, como em [11], de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2: Faixa de operação de atitude.

Ângulo	Faixa
Guinada	$-180^\circ < \psi < 180^\circ$
Arfagem	$-90^\circ < \theta < 90^\circ$
Rolagem	$-90^\circ < \phi < 90^\circ$

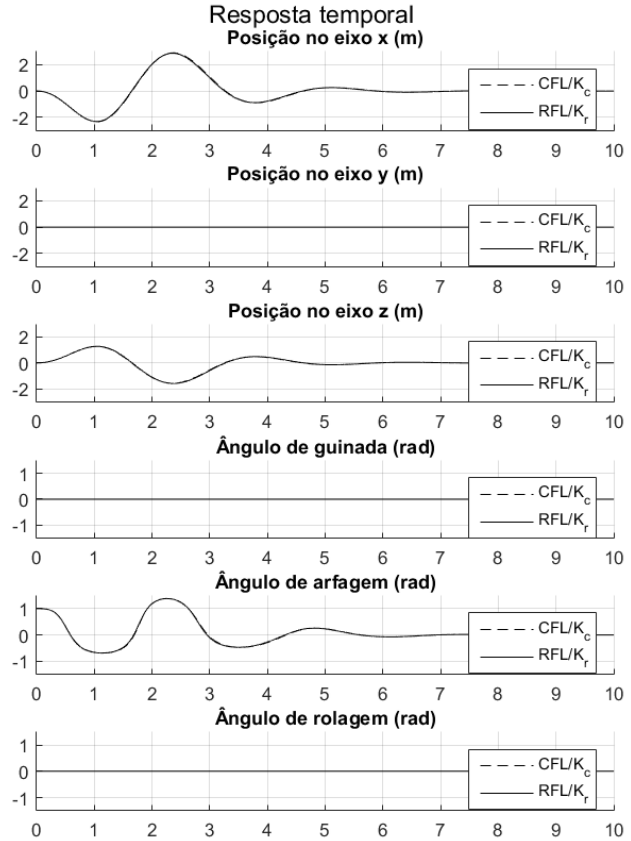


Fig. 10 – Desempenho dos controladores não lineares no caso nominal.

Nas Fig. 12-17 são mostradas as respostas do sistema em malha fechada sob condição nominal dos parâmetros, e para 10 condições aleatórias para os parâmetros, dentre os valores admissíveis de incerteza. É observado nessas figuras que, apesar do sistema apresentar estabilidade robusta para o controlador projetado, o desempenho é comprometido para incertezas não muito elevadas, apresentando sobressinal e tempo de acomodação indesejados. Porém, este resultado era esperado a partir da Proposição 1, confirmando que, mesmo utilizando a RFL associada a um controlador H_∞ o sistema apresenta pouca robustez com relação a variações paramétricas.

8. CONCLUSÃO

A aplicação da técnica apresentada, para controle robusto de sistemas não lineares, ao modelo não linear do quadricóptero, revelou que, para alguns sistemas, existe equivalência de desempenho robusto ao se utilizar tanto a RFL quanto a CFL e que, para ambos os casos, a dinâmica linearizada é dada por cadeia de integradores, sensível a variações paramétricas, de acordo com a Proposição 1. Além disso, evidenciou-se a dificuldade de regular sistemas não lineares longe do ponto de equilíbrio, utilizando apenas um

controlador linear. Por isso, mesmo que não haja ganho de robustez em desempenho ao se utilizar a RFL, ao invés da CFL, os resultados corroboram a abordagem não linear para o controle dessa classe de sistemas.

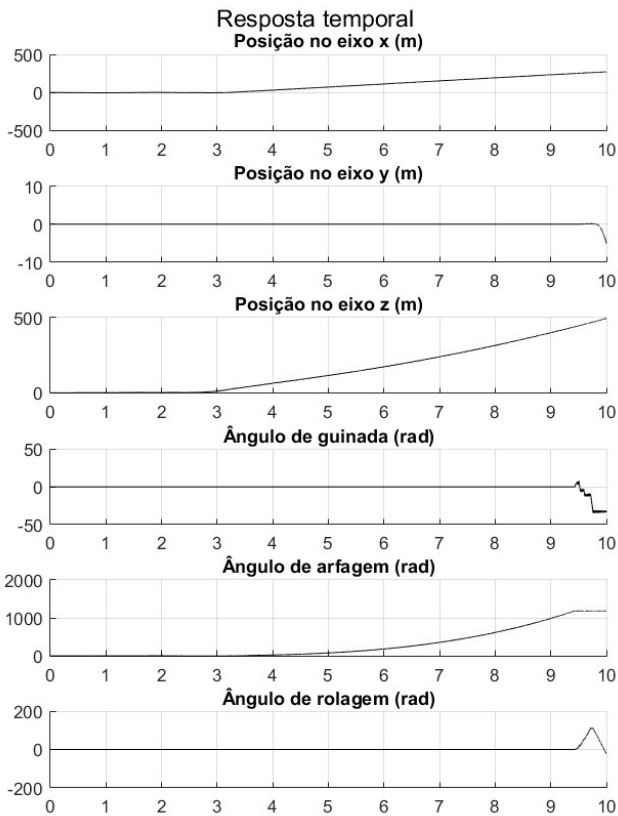


Fig. 11 – Controlador H_{∞} no caso nominal, com ângulo de arfagem inicial de 1 rad.

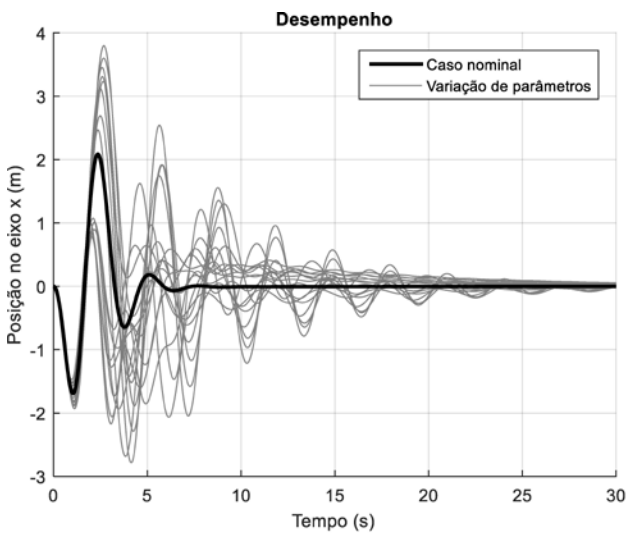


Fig. 12 – Resposta da posição X.

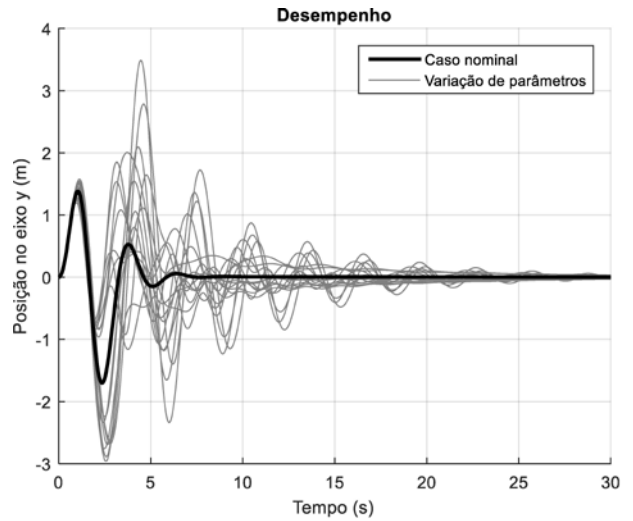


Fig. 13 – Resposta da posição Y.

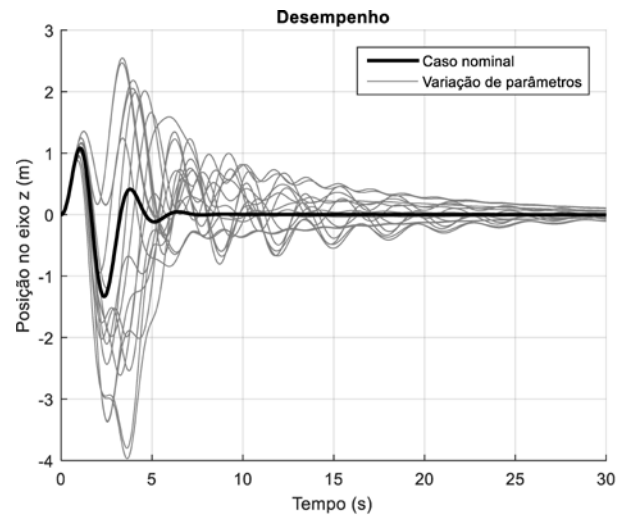


Fig. 14 – Resposta da posição Z.

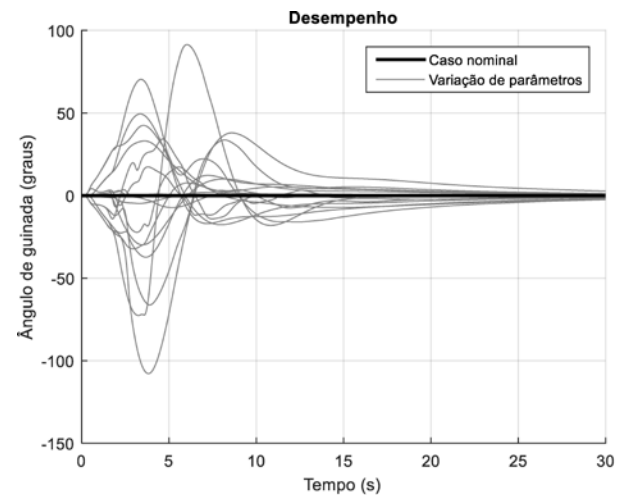


Fig. 15 – Resposta do ângulo de guinada.

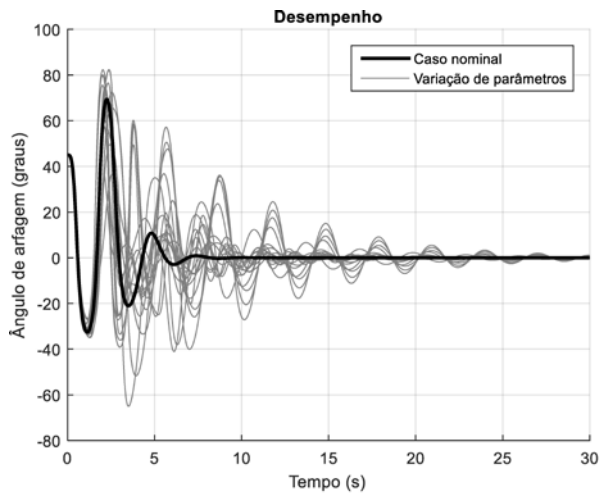


Fig. 16 – Resposta do ângulo de arfagem.

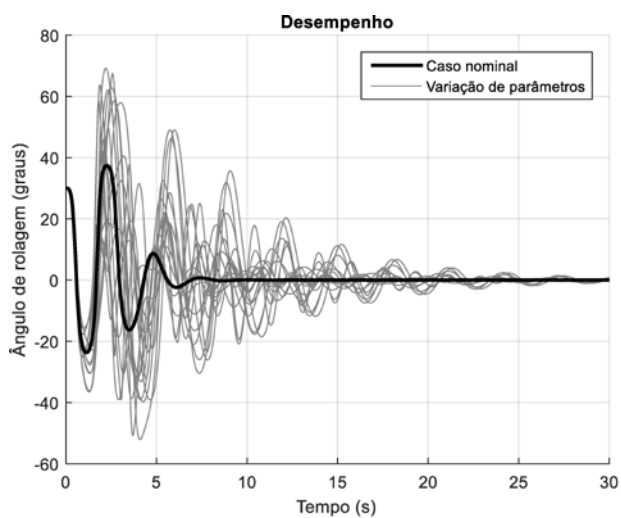


Fig. 17 – Resposta do ângulo de rolagem

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd Edition, Springer-Verlag, 1995.
- [2] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd Edition, Prentice Hall, 1993.
- [3] H. Bourlès, Adendum to “W-stability and Local Input-Output Stability Results”, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol 45(6), pgs 1220-1221, Jun 2000.
- [4] H. Bourlès, e F. Colledani, W-stability and Local Input-Output Stability Results, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol 40(6), pgs 1102-1108, Jun 1995.
- [5] H. Guillard, e H. Bourlès, Robust Feedback Linearization, Proc. 14th Int. Symp. in Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS’ 2000), Perpignan, França, Jun 2000, pgs 1-6.
- [6] A. L. D. Franco, H. Bourlès, E. R. De Pieri, e H. Guillard, Robust Nonlinear Control Associating Robust Feedback Linearization and H^∞ Control, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol 51(7), pgs 1200-1207, Jul 2006.
- [7] D. McFarlane, e K. Glover, A Loop-Shaping Design Procedure Using H-infinity Synthesis, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol 37(6), pgs 759-769, Jun 1992.
- [8] G. Zames, On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems – Part One: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity, and Positivity, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol 11(2), pgs 228-238, Abr 1966.
- [9] J. C. Willems, *The Analysis of Feedback Systems*, MIT Presse, 1971.
- [10] J. M. A. Scherpen, e A. J. Van der Schaft, Normalized Coprime Factorization and Balacing for Unstable Nonlinear Systems, *Int. J. Control*, Vol 60(6), pgs 1193-1222, Dez 1994.
- [11] A. Mokhtari, A. Benallegue, e B. Daachi, Robust Feedback Linearization and GH^∞ Controller for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robust and Systems*, Canadá, 2005.
- [12] M. Furci, G. Casadei, R. Naldi, R. G. Sanfelice, e I. Marconi, An Open-Source Architecture for Control and Coordination of a Swarm of Micro-Quadrotors, *International Conference of Unmanned Aircraft Systems*, EUA, 2015.