

Análise de desempenho \mathcal{L}_2 de sistemas lineares a parâmetros variáveis utilizando a transformada Haar no contexto do paradigma de Lyapunov

Ana Catarina Almeida Filizola de Abreu^a, Patricia Thompson Bandeira^b, Paulo César Pellanda^a

^aInstituto Militar de Engenharia, Praça General Tibúrcio, 80 – 22290-270 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

^bEscola Naval, Av. Almirante Sylvio de Noronha, s/n Castelo – 20021-010 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

* camilo.marcelo@eb.mil.br

RESUMO: Este trabalho introduz novas caracterizações do tipo Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês Linear Matrix Inequalities) para análise de desempenho robusto tipo de sistemas Lineares a Parâmetros Variáveis (LPV) ou quasi-LPV, por meio do uso de Funções de Lyapunov (FL) assintoticamente -quadráticas. Os novos algoritmos se baseiam em uma técnica recente de análise de estabilidade que utiliza gradeamento paramétrico por meio da expansão da Transformada Wavelet Haar das funções de dependência paramétrica do sistema e na busca de FL assintoticamente -quadráticas, ou seja, FL com dependência quadrática em relação aos estados do sistema e assintoticamente em relação aos parâmetros variantes no tempo. O método é aplicável a sistemas com qualquer tipo de dependência paramétrica e a domínios paramétricos irregulares, propriedades ausentes em outras técnicas de análise de desempenho de sistemas LPV. Um exemplo numérico é apresentado para validação dos algoritmos propostos e comparação de resultados com aqueles obtidos por outro método mais conservador.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas LPV. Transformada Wavelet Haar. Desempenho Robusto

ABSTRACT: This paper introduces new Linear Matrix Inequalities (LMI) characterizations to ∞ -type robust performance analysis of Linear Parameter Varying (LPV) systems, via asymptotically -quadratic Lyapunov Functions (LF). The new algorithms are based in a recent stability analysis technique that uses parameter gridding via Haar Wavelet Transform of system parameter dependence functions and in searching for asymptotically -quadratic LF, i.e. LF having a quadratic dependency on the system states and an asymptotically dependency on the time-varying parameters. The method is applicable to systems having any type of parameter dependency and to irregular parameter domains, properties which are not present in other performance analysis techniques of LPV systems. Two numerical examples are used to validate the proposed algorithms and to compare results with those obtained by a more conservative method.

KEYWORDS: LPV Systems. Haar Wavelet Transform robust performance.

1. Introdução

Sistemas não lineares podem ser modelados, para fins de análise e síntese, como Lineares a Parâmetros Variáveis (LPV) ou quasi-LPV. A denominação quasi-LPV se aplica quando pelo menos um elemento do vetor de parâmetros dependentes do tempo é uma variável endógena, ou seja, depende

também da própria dinâmica do modelo [1].

A análise de estabilidade e de desempenho robusto de sistemas LPV continua a ser um desafio, a despeito dos notáveis progressos recentes na teoria de controle de sistemas dinâmicos, particularmente de controle LPV. A maior parte dos métodos de análise e síntese para sistemas incertos ou variantes no tempo, baseados na teoria de Lyapunov, mostra-se, muitas vezes, inadequada

no caso particular de sistemas LPV. Primeiro, porque se assume, geralmente, que os parâmetros evoluem em algum politopo convexo, usualmente um hiper-retângulo [2,3], ou um simplex [4-6]. Infelizmente, tal suposição não é válida para a grande classe de sistemas LPV em que o conjunto de trajetórias paramétricas possíveis define domínios mais irregulares. Para contornar a eventual não convexidade do domínio paramétrico, esses métodos recorrem a algum tipo de técnica que estabeleça uma cobertura convexa como, por exemplo, a apresentada em [7]. No entanto, essas técnicas são suscetíveis de introduzir conservadorismos, uma vez que trajetórias não realistas são consideradas. Em segundo lugar, os métodos existentes, em geral, são capazes de tratar somente uma classe limitada de dependências paramétricas das matrizes do sistema, basicamente linear [4,5,6,8], afim [2,3,9] ou racional [10-12]. Consequentemente, esses métodos não são capazes de tratar diretamente dependências mais gerais encontradas em algumas aplicações de grande interesse prático como, por exemplo, os modelos quasi-LPV que aparecem nos campos aeroespacial e da mecatrônica. Para aplicar os métodos citados em tais problemas, recorre-se a algum tipo de esquema de linearização ou inscrição do modelo tratado em outro do tipo politópico, que são, reconhecidamente, procedimento conservadores.

Nessas mesmas linhas, algumas técnicas que apresentam os mesmos inconvenientes, mas que são de particular interesse para este trabalho por apresentarem exemplos numéricos com potencial para comparação de resultados, são as que propõem Função de Lyapunov (FL) afim-quadrática [7,13-15] e biquadrática [9].

Em [1], os autores propuseram um método ba-

seado em grade paramétrica para a análise de estabilidade de sistemas LPV que consegue tratar as dificuldades das técnicas clássicas de gradeamento do domínio paramétrico pelo uso da Transformada Haar (TH). Ou seja, o método se baseia na teoria wavelet Haar [16,17] para suplantiar as limitações dos esquemas de gradeamento clássicos que são relacionadas principalmente com a falta de garantia de estabilidade e desempenho para o domínio paramétrico contínuo. A novidade da abordagem proposta reside no uso da teoria wavelet para garantir a satisfação das restrições no domínio paramétrico inteiro, mesmo quando uma grade paramétrica arbitrariamente esparsa é considerada. Isso representa um grande avanço em relação aos métodos tradicionais de gradeamento, que não fornecem tal certificado sem a realização de testes de verificação suplementares.

No entanto, os resultados teóricos envolvidos em [1] não são sistemáticos nem construtivos de um ponto de vista numérico, requerendo manipulações algébricas específicas para cada sistema e para cada classe de função de parâmetro da matriz de estados. Mais recentemente, os autores de [18,19] introduziram novos algoritmos baseados em TH, derivados daqueles resultados, que são adequados para implementação prática e evitam manipulações analíticas e algébricas complexas quando uma ampla classe de dependências e domínios paramétricos irregulares são considerados.

Este artigo introduz novas caracterizações do tipo Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) para análise de desempenho robusto tipo de sistemas LPV com ganho \mathcal{L}_2 garantido, por meio do uso de FL assintoticamente \mathcal{L}_2 -quadráticas, com base nos algoritmos apresentados em [18,19]. Ou seja, o

novo método apresentado aqui estende as vantagens dos algoritmos de análise de estabilidade em [18] para a análise \mathcal{H}_∞ .

Para uma dada matriz real $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, \mathbf{M}^T denota a transposta, $\|\mathbf{M}\|$ é a norma 2 induzida e \mathbf{M}^{pq} é o (p,q) -ésimo elemento. \mathbf{I}_n denota a matriz identidade de dimensão n . $\mathbb{N}_{\geq 0}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ e $\mathbb{N}_+(\mathbb{R}_+)$ denotam, respectivamente, os números naturais (reais) não negativos e estritamente positivos. A notação $\mathcal{S}(\mathbf{M}) \triangleq \mathbf{M} + \mathbf{M}^T$ é utilizada para simplificar expressões matemáticas longas. \mathcal{S}^n representa matrizes reais simétricas de dimensão n . Para $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathcal{S}^n$, a notação $\mathbf{M} > \mathbf{N}$ ($\mathbf{M} \succcurlyeq \mathbf{N}$) significa que $\mathbf{M} - \mathbf{N}$ é positiva (semi)definida. Além disso, a notação $-\mathbf{M} \leq \mathbf{N}$ significa que ambas as desigualdades $\mathbf{M} \leq \mathbf{N}$ e $-\mathbf{M} \leq \mathbf{N}$ são satisfeitas. $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ denota o espaço de funções quadraticamente integráveis e $\ell_2(\mathbb{N})$ denota o espaço de sequências quadraticamente somáveis. Para o mapeamento matricial $\mathbf{M}: \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{M}(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n \times m})$ significa $\mathbf{M}^{pq}(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, para todo (p,q) . O produto interno de duas funções $f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ é denotado por $\langle f(\theta), g(\theta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)g(\theta)d\theta$. Para dois mapeamentos $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle F(\theta), g(\theta) \rangle$ representa uma matriz cujo elemento (p,q) é dado por $\langle F^{pq}(\theta), g(\theta) \rangle$.

2. Fundamentação teórica

2.1 Sistemas LPV

A estrutura dos modelos LPV ficam em um campo intermediário entre a dinâmica linear e a não linear, sendo descrita por equações diferenciais lineares cujos dados dependem possivelmente de uma forma não linear dos parâmetros que variam no tempo e podem depender da dinâmica do próprio sistema [20].

Por meio de uma escolha apropriada dos vetores das variáveis de estado \mathbf{x} , da entrada \mathbf{u} e da saída \mathbf{y} , pode-se, em geral, obter um modelo não linear em relação ao vetor de estado, mas linear em relação a entrada, da seguinte forma [20]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\theta(t))\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\theta(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\theta(t))\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (1)$$

As matrizes $\mathbf{A}(\theta(t))$, $\mathbf{B}(\theta(t))$, $\mathbf{C}(\theta(t))$ e $\mathbf{D}(\theta(t))$, cujos elementos são supostos pertencer ao espaço $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$, são de dimensões compatíveis com as dimensões do vetor de estado, dos sinais de entrada e de saída, e definem completamente a dinâmica do sistema. O vetor de parâmetros θ em (1) é suposto evoluir em um domínio compacto Θ , com taxa de variação $\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$ pertencente a um hiper-retângulo Θ_d . Apesar de que a técnica apresentada neste artigo ser aplicada ao caso de dependência paramétrica vetorial, a fim de simplificar a apresentação, será considerado somente o caso de parâmetro escalar.

2.2 Análise de desempenho robusto H_∞

O ganho induzido pela norma \mathcal{L}_2 de um sistema LPV modelado por (1), é descrito como a maior razão possível entre a norma \mathcal{L}_2 do sinal de saída $\mathbf{y}(t)$ e a norma \mathcal{L}_2 do sinal de entrada $\mathbf{u}(t)$, para um conjunto de sinais de entrada quadraticamente integráveis. O ganho \mathcal{L}_2 pode ser representado pelo menor η que satisfaz

$$\int_0^\infty (\mathbf{y}(t)^T \mathbf{y}(t)) dt \leq \eta^2 \int_0^\infty (\mathbf{u}(t)^T \mathbf{u}(t)) dt \quad (2)$$

Teorema 1 [19,21]: Para um sistema LPV, controlável, as seguintes sentenças são equivalentes:

a) O sistema é estritamente dissipativo em relação à razão de alimentação

$s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = -\eta \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \eta^{-1} \mathbf{y}^T \mathbf{y}$ e possui função de armazenamento quadrática dada por $v(\theta, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\theta) \mathbf{x}$

b) O sistema de Desigualdade Linear Matricial Parametrizada (PLMI, do inglês *Parameterized Linear Matrix Inequality*) é satisfeito

$$\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{P}^T(\theta) > 0, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\theta) + \mathbf{A}^T(\theta)\mathbf{P}(\theta) + \mathbf{P}(\theta)\mathbf{A}(\theta) & \mathbf{P}(\theta)\mathbf{B}(\theta) & \mathbf{C}^T(\theta) \\ \mathbf{B}^T(\theta)\mathbf{P}(\theta) & -\eta\mathbf{I} & \mathbf{D}^T(\theta) \\ \mathbf{C}(\theta) & \mathbf{D}(\theta) & -\eta\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (4)$$

c) O ganho \mathcal{L}_2 do sistema (1) é limitado superiormente por η .

2.3 Transformada Wavelet Haar

A TH é uma Transformada Discreta Wavelet (TDW) que permite uma representação de dimensão infinita de funções quadraticamente integráveis [19,20]. Considere as funções escala (ϕ) e wavelet (ψ) definidas como

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \theta < 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ \psi(\theta) &= \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \theta < 0,5, \\ -1, & \text{se } 0,5 \leq \theta < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Estas duas funções geram uma família de funções que são usadas para decompor e reconstruir um sinal ou uma função em $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

As funções $\phi_k(\theta) \triangleq \phi(\theta - k)$ e $\psi_{j,k}(\theta) \triangleq 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \theta - k)$ geram o espaço $\mathcal{L}_2^{\theta}(\mathbb{R})$, e a expansão de Haar de uma matriz de funções $\mathbf{M}(\theta) \in \mathcal{L}_2^{\theta}(\mathbb{R}^{n \times n})$, i.e. $\mathbf{M}(\theta) = \mathbf{M}_{\Sigma_{\infty}}(\theta)$, é dada por

$$\mathbf{M}_{\Sigma_{\infty}}(\theta) \triangleq \mathbf{M}_0 \phi_0(\theta) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{M}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta), \quad (6)$$

em que

$$\mathbf{M}_0 \triangleq \langle \mathbf{M}(\theta), \phi_0(\theta) \rangle \text{ and } \mathbf{M}_{j,k} \triangleq \langle \mathbf{M}(\theta), \psi_{j,k}(\theta) \rangle. \quad (7)$$

2.4 Limites superiores para resíduos matriciais

A TH de uma matriz de estado $\mathbf{M}(\Theta)$, é dada por $\mathbf{M}_{\Sigma_J}(\Theta)$, em que J é o nível de truncamento, e sua soma infinita pode ser reescrita como

$$\mathbf{M}(\theta) = \mathbf{M}_{\Sigma_{\infty}}(\theta) \triangleq \mathbf{M}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{M}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) \quad (8)$$

em que

$$\mathbf{M}_{\Sigma_J}(\theta(t)) = \mathbf{M}_0 \phi_0(\theta(t)) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{M}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta(t)) \quad (9)$$

e

$$\mathbf{M}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) = \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{M}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta) \quad (10)$$

é o resíduo. Note que $\mathbf{M}_{\Sigma_J}(\theta)$ é constante por partes e pode ser interpretada como um tipo de discretização de $\mathbf{M}(\Theta)$. Sabe-se que na TH, os coeficientes de mais alta resolução são aqueles com mais baixo nível de energia. Logo, para $J \gg 1$, o resíduo $\mathbf{M}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\Theta)$ carrega informação pobre ou irrelevante e $\mathbf{M}_{\Sigma_J}(\theta)$ é uma aproximação bastante precisa de $\mathbf{M}(\theta)$.

Em [1] os autores demonstram que existem funções reais positivas constantes por parte $\{\alpha_m(\theta)\}_{m=0}^{2^J-1}$, para qualquer J , tal que

$$\|\mathbf{M}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)\| \leq \sum_{m=0}^{2^J-1} \alpha_m(\theta), \quad \forall \theta \in \theta. \quad (11)$$

Contudo, o cálculo de α_m para funções de dependência paramétrica geral envolvem análises não triviais. Esta dificuldade foi suplantada pelos algoritmos apresentados em [18,19] que calculam numericamente os limitantes superiores dos re-

síduos de matrizes com qualquer tipo de dependência paramétrica.

3. PILF via TH para desempenho robusto

Nesta seção, são apresentados novos algoritmos para a análise de desempenho para FL Independentes do Parâmetro (PILF, da sigla em inglês para *Parameter Independent Lyapunov Functions*).

3.1 Expansão de Haar Truncada da matriz da dinâmica e limitantes superiores de resíduos

Para um nível de truncamento J , considere os intervalos contínuos $\theta_{j_i} = \frac{i-1}{2^{J+1}}, \frac{i}{2^{J+1}}$, com $\bigcup_{i=1}^{2^{J+1}} \{\theta_{j_i}\} = \theta$, e $\mathcal{D}_{j_i}^o \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \theta$ como o conjunto discreto dos 2^{J+1} pontos equidistantes

$$\theta_i = \frac{2i-1}{2^{J+2}}, \theta_i \in \theta_{j_i} \quad (12)$$

Note que $\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_i)$ em é uma matriz de funções constantes por partes cujos valores discretos das constantes são $\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_i)$, $\theta_i \in \mathcal{D}_{j_i}^o$.

Então, dados $\mathbf{M}(\theta) \in \mathcal{L}_2^o(\mathbb{R}^{n \times n})$, Θ e J , é possível calcular numericamente o conjunto de matrizes discretas $\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_i) \forall \theta_i \in \mathcal{D}_{j_i}^o$, e o conjunto de matrizes de resíduos máximos para cada intervalo correspondente Θ_{j_i} , da seguinte forma [18,19]:

Passo 1: Calcular $\mathbf{M}(\theta_{\hat{\rho}})$ para valores discretos igualmente espaçados (congelados) $\theta_{\hat{\rho}} = \hat{\rho}/2^{j^*}$ em uma grade paramétrica fina $\mathcal{D}_{\hat{\rho}}^o \triangleq \{\theta_{\hat{\rho}}\}_{\hat{\rho}=1}^{2^{j^*+1}} \subset \theta$, onde j^* é escolhido suficientemente grande tal que $\|\{\mathbf{M}^{pq}(\theta_{\hat{\rho}})\}_{\hat{\rho}=1}^{2^{j^*+1}}\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \cong \|\mathbf{M}^{pq}(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R})}$, $\forall pq$, de forma a evitar perda de informação. O inteiro j^* deve ser escolhido, ao menos, maior do que $J+2$ e, para um dados limiar $\xi \ll 1$ um valor adequado

para j^* é alcançado quando o número $2^{j^*} + 1$ de valores amostrados de $\mathbf{M}^{pq}(\theta)$ é tal que $\forall pq$:

$$\|\{\mathbf{M}^{pq}(\theta_{\hat{\rho}})\}_{\hat{\rho}=1}^{2^{(j^*+1)+1}}\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} - \|\{\mathbf{M}^{pq}(\theta_{\hat{\rho}})\}_{\hat{\rho}=1}^{2^{j^*+1}}\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \leq \xi;$$

- **Passo 2:** Calcular a TH de $\mathbf{M}(\theta_{\hat{\rho}})$ conforme (6), mas truncando o primeiro somatório em $j=J$ e guardando os primeiros 2^{J+1} coeficientes wavelet, $J \gg j^*$, para obter $\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_{\hat{\rho}})$ e $\mathbf{M}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_{\hat{\rho}}) = \mathbf{M}(\theta_{\hat{\rho}}) - \mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_{\hat{\rho}})$, $\forall \theta_{\hat{\rho}} \in \mathcal{D}_{\hat{\rho}}^o$, assim como em (8);
- **Passo 3:** Selecionar $\tilde{\mathbf{M}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)$, $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{j_i}^o$, como as matrizes cujos elementos são os máximos absolutos dos resíduos dos respectivos elementos de $\mathbf{M}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_{\hat{\rho}})$ para cada um dos 2^{J+1} intervalos Θ_{j_i} de tamanho 2^{j^*-J-1} , i.e., para cada conjunto de valores $(i-1)2^{j^*-J-1} + 1 \leq \hat{\rho} < (i)2^{j^*-J-1}$;
- **Passo 4:** Selecionar os valores $\mathbf{M}_{\Sigma_E}(\theta_i)$ nos pontos médios de Θ_{j_i} e calcular $\|\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_i)\|$ e seus resíduos máximos para os intervalos correspondentes $\|\tilde{\mathbf{M}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|$, $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{j_i}^o$.

3.2 Condições suficientes para desempenho H_∞

Considere a representação em espaço de estados de um sistema LPV, com dependência paramétrica geral, múltiplas entradas e saídas em , em que os elementos das matrizes $\mathbf{A}(\theta(t))$, $\mathbf{B}(\theta(t))$, $\mathbf{C}(\theta(t))$ e $\mathbf{D}(\theta(t))$ são funções do parâmetro $\theta(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ considerado escalar. Admite-se que tanto o parâmetro quanto a sua taxa de variação evoluem em domínios compactos, ou seja, $\theta(t) \in \Theta$ e $\dot{\theta}(t) \in \Theta_d$, respectivamente. Dado um nível de truncamento J , obtêm-se os conjuntos de matrizes truncadas $\mathbf{A}_{\Sigma_j}(\theta_i)$, $\mathbf{B}_{\Sigma_j}(\theta_i)$, $\mathbf{C}_{\Sigma_j}(\theta_i)$, $\mathbf{D}_{\Sigma_j}(\theta_i)$ e os limites superiores correspondentes, $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|$, $\|\tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|$, $\|\tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|$, $\|\tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|$ calculados $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{j_i}^o$.

O seguinte teorema apresenta uma condição suficiente baseada em um número finito de restrições

para a existência de uma FL independente do parâmetro tal que o sistema LPV em tenha ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$.

Teorema 2: O sistema LPV em , supostamente controlável, tem ganho $\mathcal{L}_2 \leq \eta$ se existirem $\gamma \in \mathbb{R}_+$ e $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$ tal que o seguinte problema de otimização do nível de desempenho $\eta \in \mathbb{R}_+$ tenha solução, $\forall \theta_i \in \Theta_J \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \Theta$:

$$\min_{(\gamma, \mathbf{P})} \eta$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{P} > 0 \quad (13)$$

$$\mathbf{P} - \gamma \mathbf{I}_n \leq 0 \quad (14)$$

$$\mathbf{N}_{\Sigma_J}(\theta_i) + 2(\gamma \|\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| + \|\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\|) \mathbf{I}_{n+m+p} < 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{N}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{C}_{\Sigma_J}^T(\theta_i) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_J}^T(\theta_i)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}_{\Sigma_J}^T(\theta_i) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta_i) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} e$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e

Prova: Conforme Teorema 1, o sistema LPV (1), controlável, tem ganho \mathcal{L}_2 limitado superiormente por η se, e somente se, existir $\eta \in \mathbb{R}_+$ e $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$ e , tal que o conjunto de PLMI (3) e (4) seja satisfeito para todo $\theta(t) \in \Theta$.

As matrizes $\mathbf{A}(\theta(t))$, $\mathbf{B}(\theta(t))$, $\mathbf{C}(\theta(t))$ e $\mathbf{D}(\theta(t))$ em (1), são substituídas em (4) por suas expansões de Haar truncadas e respectivos resíduos resultando em:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_J}^T(\theta)\mathbf{P} + \mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta)\mathbf{P} \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & \mathbf{C}_{\Sigma_J}^T(\theta) + \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta) \\ -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}_{\Sigma_J}^T(\theta) + \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta) \\ \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

Separando o conjunto de PLMI em duas partes, a primeira com as expansões truncadas e a segunda com os resíduos, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{C}_{\Sigma_J}^T(\theta) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_J}^T(\theta)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}_{\Sigma_J}^T(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta)\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & \mathbf{0} \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{N}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{P}\mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) + \mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}^T(\theta)\mathbf{P} + \mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) + \mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}^T(\theta) < 0 \quad (18)$$

em que

$$\mathbf{N}_{\Sigma_J}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{C}_{\Sigma_J}^T(\theta) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_J}^T(\theta)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}_{\Sigma_J}^T(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) & \mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} e \quad \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Uma vez que $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$, a restrição implica $\|\mathbf{P}\| \leq \gamma$. Então, $\forall \theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned} PN_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) + N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}^T(\theta)P &\leq \|PN_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) + N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}^T(\theta)P\| I_{n+m+p} \\ &\leq 2\|P\| \|N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| I_{n+m+p} \leq 2\gamma \|N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| I_{n+m+p}. \end{aligned} \quad (19)$$

Como os elementos de $N_{\Sigma_j}(\theta)$ são, por construção, constantes por partes, então $\forall \theta \in \theta_{J_i}$ e $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\theta$, para cada um dos 2^{J+1} intervalos as relações a seguir são verdadeiras:

$$\begin{aligned} N_{\Sigma_j}(\theta) = N_{\Sigma_j}(\theta_i), \text{ com } \|N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| &\leq \|\tilde{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \text{ e} \\ \|N_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta)\| &\leq \|\tilde{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\| \end{aligned} \quad (20)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} N_{\Sigma_j}(\theta) + PN_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) + N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}^T(\theta)P + N_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) + N_{\Sigma_{\varepsilon_2}}^T(\theta) &\leq \\ N_{\Sigma_j}(\theta_i) + 2(\gamma \|\tilde{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| + \|\tilde{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\|) I_{n+m+p} &< 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Desta forma, o conjunto de desigualdades implica que o conjunto de PLMI é uma condição suficiente para que o ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$, no caso de uma variável de Lyapunov independente do parâmetro \mathbf{P} .

4. PDLF via TH para desempenho robusto

A utilização de FL Dependentes do Parâmetro (PDLF, da sigla em inglês para *Parameter Dependent Lyapunov Functions*) para a análise de desempenho pode reduzir o conservadorismo no Teorema 2. Considere inicialmente a seguinte função constante por partes construída por funções da base Haar [18]:

$$\mathbf{Q}(\theta) = \sum_{h=0}^{2^{G+1}-1} \mathbf{Q}_h \phi_h(2^{G+1}\theta) \quad (22)$$

onde $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$ e $G \in \mathbb{N}$, e a matriz candidata $\mathbf{P}(\theta)$ é dada por

$$\mathbf{P}(\theta) \triangleq \int \mathbf{Q}(\theta) d\theta \sum_{h=0}^{2^{G+1}-1} (\mathbf{Q}_h \theta + \hat{\mathbf{Q}}_h) \phi_h(2^{G+1}\theta) \quad (22)$$

onde \mathbf{Q}_h e $\hat{\mathbf{Q}}_h \in \mathbb{S}^n$, $h = 0, \dots, 2^{G+1} - 1$, são variáveis a serem determinadas. A matriz candidata de Lyapunov $\mathbf{P}(\theta)$ em é afim por partes, mas não necessariamente continuamente diferenciável por partes. Assim sendo, algumas restrições devem ser impostas sobre as variáveis $\hat{\mathbf{Q}}_h$.

Lema 1: [18] Considere $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$, $h = 0, \dots, 2^{G+1} - 1$, e $\hat{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{S}^n$. A função afim por partes $\mathbf{P}(\theta)$ em também é continuamente diferenciável por partes se e só se $\hat{\mathbf{Q}}_h$, $h=0, \dots, 2^{G+1} - 1$, for obtida recursivamente da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{Q}}_h = \sum_{r=1}^h (\mathbf{Q}_{r-1} - \mathbf{Q}_r) \frac{r}{2^{G+1}} + \hat{\mathbf{Q}}_0. \quad (24)$$

Suponha agora $\forall \theta(t) \in \theta$ e $|\dot{\theta}(t)| \leq \rho \in \mathbb{R}_+$. Dado um nível de truncamento J , obtêm-se os conjuntos de matrizes truncadas e os limites superiores correspondentes dos resíduos das matrizes do modelo em espaço de estado do sistema LPV em (1). Considere também $\mathbf{P}_{\Sigma_j}(\theta_i)$ e $\tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)$, o truncamento e o resíduo da matriz candidata $\mathbf{P}(\theta)$. Então o teorema a seguir estabelece uma condição suficiente baseada em um número finito de restrições para a existência de $\mathbf{P}(\theta)$, tal que o ganho $\mathcal{L}_2 < \eta$:

Teorema 3: O sistema LPV em , suposto controlável, tem ganho $\mathcal{L}_2 \leq \eta$ se existirem matrizes $\hat{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$, $0 \leq h \leq 2^{G+1}-1$, obtidas recursivamente conforme o Lema 1, e escalares $\gamma_{J_i}, \gamma_{\varepsilon_i} > 0 \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq 2^{J+1}$, tal que o seguinte problema de otimização do nível de desempenho $\eta \in \mathbb{R}_+$ tenha solução, $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\theta \subset \theta$:

$$\begin{aligned} \min_{(\gamma_{\varepsilon_i}, \gamma_{J_i}, \hat{\mathbf{Q}}_0, \mathbf{Q}_h)} \eta \\ \text{sujeito a } \mathbf{P}_{\Sigma_j}(\theta_i) - \gamma_{\varepsilon_i} \mathbf{I}_n > 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$P_{\Sigma_j}(\theta_i) - \gamma_{j_i} I_n \leq 0, \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\varepsilon_i} I_n & P_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i) \\ P_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i) & \gamma_{\varepsilon_i} I_n \end{bmatrix} \geq 0, \tag{27}$$

$$\mathbb{Q}_\pm(\theta_i) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_j}(\theta_i) \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{j_1}}(\theta_i)) + 2\gamma_{j_i} \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| I_{n+m+p} + 2\gamma_{\varepsilon_i} (\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| + \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{j_1}}(\theta_i)\|) I_{n+m+p} + 2\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\| I_{n+m+p} < 0 \tag{28}$$

em que

$$\mathbb{Q}_\pm(\theta_i) = \begin{bmatrix} \pm \rho Q(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & -\eta I_m & 0 \\ C_{\Sigma_j}(\theta_i) & D_{\Sigma_j}(\theta_i) & -\eta I_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}_{\Sigma_j}(\theta_i) = \begin{bmatrix} P_{\Sigma_j}(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{j_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} A_{\Sigma_j}(\theta_i) & B_{\Sigma_j}(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i) & \tilde{B}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i) & \tilde{D}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i) & 0 \end{bmatrix}$$

Prova: Conforme Teorema 1, o sistema LPV (1), controlável, tem ganho \mathcal{L}_2 limitado superiormente por η se, e somente se, existir $\eta \in \mathbb{R}_+$ e $P(\theta) \in \mathbb{S}^n$, tal que o conjunto de PLMI (3) e (4) seja satisfeito para todo $\theta(t) \in \Theta$.

Como $\gamma_{\varepsilon_i} \in \mathbb{R}_+$ e $P_{\Sigma_j}(\theta_i) \in \mathbb{S}^n$ então (25) implica em $P_{\Sigma_j}(\theta_i) > 0$ e (26) implica em $\|P_{\Sigma_j}(\theta_i)\| \leq \gamma_{j_i}$. Além disso, (27) implica em $\|P_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\| \leq \gamma_{\varepsilon_i}$ e

$$-\gamma_{\varepsilon_i} \leq P_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) \leq \gamma_{\varepsilon_i}. \tag{29}$$

Ambos $P(\theta)$ e $P_{\Sigma_j}(\theta)$ são, por construção, afim por partes e constante por partes, respectivamente, então $P_{\Sigma_j}(\theta) = P_{\Sigma_j}(\theta_i)$ e $P_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) = P(\theta) - P_{\Sigma_j}(\theta_i)$, $\forall \theta \in \theta_{j_i}$. A partir desta igualdade e das condições (25) e (26), tem-se que:

$$0 < P_{\Sigma_j}(\theta_i) - \gamma_{\varepsilon_i} I_n \leq P(\theta) \leq P_{\Sigma_j}(\theta_i) + \gamma_{\varepsilon_i} I_n.$$

Portanto, $P(\theta) > 0 \forall \theta \in \Theta$, que corresponde a (3).

Uma vez que a taxa de variação $\dot{\theta}$ é linear em (4), basta checar apenas os pontos extremos $\pm \rho$ do conjunto Θ_d , para todos os valores admissíveis de θ . Analogamente ao Teorema 2, as matrizes do modelo em espaço de estado $A(\theta(t))$, $B(\theta(t))$, $C(\theta(t))$ e $D(\theta(t))$ em e a matriz de Lyapunov candidata

$P(\theta)$, são substituídas em (4) por suas expansões de Haar truncadas e respectivos resíduos, resultando em:

$$\mathbb{Q}_\pm(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}^T(\theta) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_j}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_{j_1}}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_j}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_{j_1}}(\theta)) + (\mathbb{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)) < 0. \tag{31}$$

em que

$$\mathbb{Q}_\pm(\theta) = \begin{bmatrix} \pm \rho Q(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & -\eta I_m & 0 \\ C_{\Sigma_j}(\theta) & D_{\Sigma_j}(\theta) & -\eta I_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\Sigma_{j_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} A_{\Sigma_j}(\theta) & B_{\Sigma_j}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} A_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) & B_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) & D_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}_{\Sigma_j}(\theta) = \begin{bmatrix} P_{\Sigma_j}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbb{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) = \begin{bmatrix} P_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os três últimos termos em (31) podem ser substituídos por seus limites superiores:

$$\mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_j}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_j}(\theta)) \leq 2 \|\mathbb{P}_{\Sigma_j}(\theta)\| \|\mathbb{M}_{\Sigma_j}(\theta)\| I_{n+m+p}.$$

Como $Q(\theta)$ e $P_{\Sigma_j}(\theta)$ são constantes por partes, $\forall \theta \in \theta_{j_i}$ e $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{j_i}^\theta$, as seguintes relações são verdadeiras para cada um dos 2^{i+1} intervalos, i.e., para $i = 1, \dots, 2^{i+1}$.

$$Q(\theta) = Q(\theta_{-i}) \tag{33}$$

$$P_{\Sigma_j}(\theta) = P_{\Sigma_j}(\theta_i), \text{ com } \|P_{\Sigma_\varepsilon}(\theta)\| \leq \|\tilde{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|, \tag{34}$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta) = \mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i), \text{ com } \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| \leq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \quad (35)$$

$$\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta)\| \leq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\| \quad (36)$$

$$2\|\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta)\| \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| \mathbf{I}_{n+m+p} \leq 2\gamma_{J_i} \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p}, \quad (37)$$

$$2\|\mathbb{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)\| \|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)\| \mathbf{I}_{n+m+p} \leq 2\gamma_{\varepsilon_i} \|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p}, \quad (38)$$

$$2\|\mathbb{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)\| \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| \mathbf{I}_{n+m+p} \leq 2\gamma_{\varepsilon_i} \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p}. \quad (39)$$

Logo, utilizando as relações (37), (38), (39) pode-se reescrever (40) como , $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^{\theta}$.

5. Exemplo numérico

Considere o seguinte modelo apresentado em [22]:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -1 - 1,3\theta & 0,5 - 20\theta \\ -1 + 2\theta & -2 - 10\theta \end{bmatrix},$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 1 + 2,2\theta & -4 + 0,5\theta \\ -1 - 6\theta & -1 - 5\theta \end{bmatrix},$$

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

em que $\theta \in [0, 1]$ e $\dot{\theta} \in [-10, 10]$. Os autores de [22], em sua técnica, obtiveram os valores de η utilizando as seguintes noções de estabilidade: quadrática (Q), afim-quadrática (AQ) e bi-quadrática (BQ).

- Para aplicar os métodos descritos neste artigo, cujos principais resultados estão resumidos nos Teoremas 2 e 3, tomam-se os dados numéricos do sistema exemplo e seguem-se os seguintes passos:
- **Passo 1:** Para cada matriz do sistema, executar o Algoritmo da Seção 3.1, a fim de obter os

dados numéricos associados às suas expansões Haar truncadas, para um dado nível de truncamento J e G , conforme o caso;

- **Passo 2:** Escrever em código computacional Matlab as PLMI (14) a (16), do Teorema 2, ou as PLMI (26) a (29), do Teorema 3, conforme o caso;

- **Passo 3:** Resolver o problema de otimização dos Teoremas 2 ou 3, conforme o caso, utilizando um solver SDP do YALMIP 1.

Aplicando o Teorema 2, para diferentes níveis de truncamento J , e otimizando os valores de η , obtêm-se os resultados apresentados na **tabela 1**. Verifica-se que, conforme J aumenta, o valor de η tende a 7,5848, o mesmo valor obtido por [22] para \mathbf{P} independente de θ (curva Q da Fig. 1). Calculando também a norma H_{∞} para valores fixos do parâmetro, ponto a ponto, no intervalo $\theta \in [0, 1]$, encontra-se o valor máximo de $\eta = 5,5798$, conforme a Fig. 2, sendo assim menor que o valor de $\eta = 7,5848$ obtido para uma FL independente do parâmetro, como era de se esperar. Na **tabela 1**, também são apresentadas as estimativas de η para as condições necessárias obtidas simplesmente testando as PLMI e do Teorema 1, para $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ constante, sendo este o procedimento adotado pelo método LPV clássico de gradeamento do domínio paramétrico. Observa-se, pela reprodução dos resultados da **tabela 1** na **figura 1**, que estes testes resultam em limitantes inferiores (estimativas otimistas, não garantidas, para o limite superior da norma H_{∞}) para os valores de η fornecidos para as condições suficientes do Teorema 2 (estimativas pessimistas para o limite superior da norma H_{∞} , cujo conservadorismo diminui assintoticamente).

Aplicando o algoritmo do Teorema 3, para

<https://yalmip.github.io/allsolvers/>

FL com $\mathbf{P}(\theta)$ suportando uma dependência geral (\mathcal{L}_2Q), para $J = 13, G = 0,1,2,3$, com $\rho \in [0, 10]$, comparam-se com os gráficos de estabilidade quadrática (Q), afim-quadrática (AQ) e bi-quadrática (BQ) de [22] e têm-se os resultados representados na **figura 3**. Como era de se esperar, os resultados obtidos pelo método (\mathcal{L}_2Q) são menos conservadores que os apresentados por [22]. Neste caso, $\mathbf{P}(\theta)$ possui uma dependência paramétrica mais geral e menos restritiva, provendo maior grau de liberdade na busca de uma FL viável. Observa-se também que, à medida que G aumenta, as curvas $\eta \times \rho$ tendem a se aproximar entre si, indicando a proximidade de uma saturação em G e da utilização da liberdade máxima oferecida pelo espaço \mathcal{L}_2 para a busca de uma FL dependente do parâmetro. Pode-se verificar que todas as curvas $\eta \times \rho$ obtidas neste trabalho e naquele de [22] têm, como limite inferior, o valor máximo da norma do sistema ($\|H(\theta_i)\|_\infty$) para todos os pontos fixos do domínio paramétrico e, como limite superior, o valor obtido para \mathbf{P} constante que considera ilimitada a taxa de variação paramétrica, ou seja, $\eta(\rho) \in [5,5798; 7,5848]$. Esta é uma propriedade conhecida dos sistemas LPV.

Tab 1 – Valores de η para o Exemplo Numérico com FL independente do parâmetro.

J	η - Teorema 2	η - Cond. Suficiente
5	26,2483	7,5046
6	12,7782	7,5447
7	9,7900	7,5648
8	8,6264	7,5748
9	8,0945	7,5799
10	7,8374	7,5824
11	7,7106	7,5837
12	7,6475	7,5843
13	7,6161	7,5846

J	η - Teorema 2	η - Cond. Suficiente
14	7,6004	7,5848
15	7,5925	7,5848
16	7,5886	7,5848
17	7,5866	7,5848
18	7,5856	7,5848
19	7,5851	7,5848
20	7,5849	7,5848

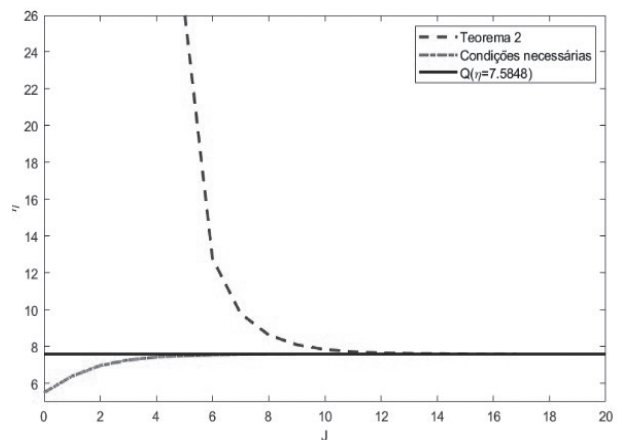


Fig. 1 – Valores de η para o exemplo numérico com FL independente do parâmetro.

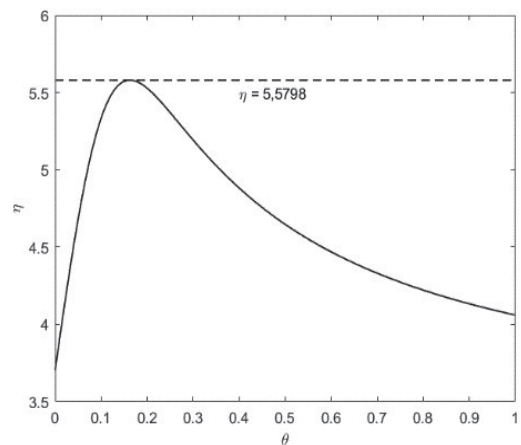


Fig. 2 – Norma η , do sistema do exemplo numérico, obtida para valores fixos de θ .

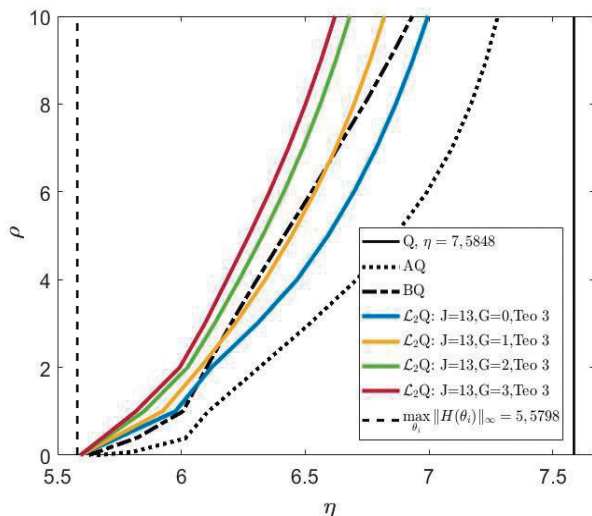


Fig. 3 – Valores de η obtidos pelo uso do Teorema 3, para o Exemplo Numérico, com $J = 13$ e diferentes valores de G , ρ comparados com os resultados de [22].

6. Conclusão

Contrariamente aos métodos LPV clássicos de gradeamento do domínio paramétrico, que falham na garantia de estabilidade e desempenho

por se basearem em condições somente necessárias devido à característica inerente ao paradigma de Lyapunov de dimensionalidade infinita e presença de infinitas restrições, as técnicas de discretização do domínio paramétrico via TH, objetos deste estudo, garantem a estabilidade e o desempenho, pois se baseiam em condições suficientes. Essas condições são obtidas pois os resíduos do truncamento da expansão Haar das matrizes de estado e de Lyapunov não são negligenciados, mas substituídos nas PLMI por seus limitantes superiores.

Este artigo apresenta a extensão dos resultados sobre análise de estabilidade via TH exposta em [18], para a análise de desempenho robusto H_∞ de sistemas LPV. Sistemas exemplos com dependências paramétricas simples foram utilizados para permitir comparações dos resultados obtidos com técnicas de desempenho bi-quadrática e afim-quadrática encontrados na literatura, embora qualquer tipo de função de dependência no espaço possa ser considerada sem restrições adicionais.

Referências bibliográficas

- [1] DE ARAUJO, L. O., PELLANDA P. C., GALDINO, J. F., SIMOES, A. M. Haar-Based Stability Analysis of LPV Systems. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol 60, no 1, pp. 192-198, 2015.
- [2] GAHINET, P. APKARIAN, P. CHILALI, M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3):436-442, Mar 1996.
- [3] BLIMAN, P. A. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. SIAM journal of Control and Optimization, 42:2016 - 2042, Jun 2003.
- [4] GEROMEL, J. C., COLANERI, P. Robust stability of time varying polytopic systems. Systems & Control Letters, 55(1):81-85, 2006.
- [5] OLIVEIRA, R. C. L., PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(7):1334-1340, 2007.
- [6] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A., VICINO, A. Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions. Automatica, 43(2):309 - 316, 2007.
- [7] YU, J., SIDERIS, A. H_1 control with parametric Lyapunov functions. Systems & Control Letters, 30(2-3):57 - 69, 1997.
- [8] BLANCHINI, F.; MIANI, S. A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain

- linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3):641-647, Mar 1999.
- [9] TROFINO NETO, A., DE SOUZA, C. E. Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1303-1307, Aug 2001.
- [10] SCHERER, C. W. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37:361-375, Mar 2001.
- [11] WANG, F., BALAKRISHNAN, V. Improved stability analysis and gain-scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):39-50, 2002.
- [12] CHESI, G. Sufficient and necessary LMI conditions for robust stability of rationally time-varying uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(6):1546-1551, Jun 2013.
- [13] FERON, E., APKARIAN, P., GAHINET, P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041-1046, Jul 1996.
- [14] HADDAD, W. M., BERNSTEIN, D. S. Parameter-dependent Lyapunov functions, constant real parameter uncertainty, and the Popov criterion in robust analysis and synthesis. 1. Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, pages. 2274-2279 vol.3, Dec 1991.
- [15] KAPILA, V., HADDAD, W. M., ERWIN, R. S., BERNSTEIN, D. S. Robust controller synthesis via shifted parameter-dependent quadratic cost bounds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(7):1003-1007, Jul 1998.
- [16] BURRUS, C. S., GOPINATH, R. A., GUO, H. Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. Prentice Hall, 1998.
- [17] MALLAT, S. A Wavelet Tour of Signal Processing. Elsevier, 2009.
- [18] BANDEIRA, P. T., PELLANDA, P. C., DE ARAUJO, L. O. New Haar-based algorithms for stability analysis of LPV systems. *IEEE Control Systems Letters*, 2(4):605-610, Oct 2018.
- [19] BANDEIRA, P. T. Análise de Estabilidade e de Desempenho Robusto de Sistemas Lineares Variantes no Tempo com Dependência Paramétrica Geral Via Transformada Wavelet Haar. Tese de Doutorado, Instituto Militar de Engenharia, 2018.
- [20] RUGH, W. J., SHAMMA, J. S. Survey paper research on gain scheduling. *Automatica*, 36:1401-1425, 2000.
- [21] SCHERER, C. and WEILAND, S. Linear Matrix Inequalities in Control. Delft University of Technology and Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 2005. <<http://www.st.ewi.tudelft.nl/roos/courses/WI4218/lmi052.pdf>> acessado em 22/08/2019.
- [22] DE OLIVEIRA, J., TROFINO NETO, A., DE SOUZA, C. E. Análise e síntese H_∞ para sistemas LPV. *Revista Controle & Automação*, 13(1):6-12, 2002.