

Modelo tridimensional de um veículo de três eixos por transformadores cinemáticos.

Rafael Vitor Guerra Queiroz*, Ricardo Teixeira da Costa Neto
Instituto Militar de Engenharia (IME)
Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
*rafa.enge@gmail.com

RESUMO: Este trabalho tem por finalidade apresentar um modelo tridimensional de um veículo de três eixos com suspensões independentes MacPherson e esterçamento nos eixos dianteiro e intermediário. O modelo foi desenvolvido no software MATLAB. São implementadas duas simulações no modelo: uma considerando a acomodação da suspensão ao peso do veículo, e outra considerando a execução de uma manobra evasiva dupla a baixas velocidades. É empregado o método dos transformadores cinemáticos, a fim de considerar as não-linearidades provenientes da configuração de suspensão. Os resultados obtidos de acomodação da suspensão são comparados com os resultados obtidos para uma viatura de dois eixos. Na manobra evasiva dupla, os resultados obtidos são qualitativamente analisados. Conclui-se que a inserção de um novo eixo na carroceria acrescenta mais uma fonte de esforços no chassi, explicando as diferenças obtidas no comportamento dinâmico do veículo de dois eixos e de três eixos.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem da dinâmica veicular. Transformadores cinemáticos. Suspensão MacPherson. Simulação.

ABSTRACT: This work presents a three-dimensional model of a three-axle vehicle with independent MacPherson suspensions and with front and intermediate steering axles. The model is developed using MATLAB software. Two tests are simulated: the first, considering suspension accommodation to vehicle weight, and the other doing a double lane-change maneuver in low velocities. The kinematic transformers method is used to consider the nonlinearities provided by suspension geometry. The suspension accommodation results are compared with the results of a two-axle vehicle. Then, the double lane-change maneuver results are qualitatively analyzed. It is concluded that the insertion of a new axle adds a new source of forces in the chassis, explaining the differences obtained in the dynamic behavior of the two axle and three axle vehicle.

KEYWORDS: Vehicle dynamics modelling. Kinematic transformers. MacPherson suspension. Simulation.

1. Introdução

Um veículo no espaço tridimensional pode ser entendido como um conjunto de corpos unidos por juntas e elementos complacentes, isto é, molas e amortecedores. A sua modelagem computacional, com a finalidade de estudar o seu comportamento dinâmico diante excitações de base originadas no solo, é uma ferramenta extremamente importante para analisar fatores como o conforto, vibrações

e acelerações sofridas no chassi. Junto da construção de protótipos veiculares para testes em campo, a modelagem computacional ocupa um importante papel no desenvolvimento de um veículo.

A fim de evitar despesas para adquirir um software comercial, e também para se ter a visão de como o mecanismo é encadeado por meio do equacionamento adotado, optou-se por elaborar um algoritmo próprio, que neste trabalho foi desenvolvido no software MATLAB

Este trabalho tem por objetivo modelar por meio de um algoritmo próprio a dinâmica de um veículo de três eixos, estudando seu comportamento em uma manobra evasiva dupla em baixas velocidades. Os parâmetros do veículo foram extraídos de [1] e [5], os parâmetros de inércia e das molas e amortecedores foram extraídos de [3], e o parâmetro do pneu foi retirado de [2].

Os eixos frontal e intermediário são esterçantes e o eixo traseiro não esterçante. As suspensões são independentes e do tipo MacPherson. Considera-se a influência da configuração da suspensão no equacionamento cinemático, que conduz a uma abordagem não-linear da cadeia cinemática. Para a solução das equações, utiliza-se o método dos transformadores cinemáticos [1].

O chassi é considerado um corpo rígido com seis graus de liberdade (posição e rotação nos três eixos coordenados do espaço – xyz). Cada eixo esterçante tem três graus de liberdade, um de cada suspensão e o terceiro pertinente ao mecanismo de direção. Cada suspensão do eixo traseiro possui um grau de liberdade. São considerados ainda como graus de liberdade o movimento de spin de cada roda. As equações de movimento dos corpos do veículo no referencial inercial são obtidas a partir das equações de Newton-Euler, utilizando o princípio de D'Alembert [2].

Os resultados obtidos do comportamento da suspensão são comparados com o modelo desenvolvido por [5], em regime permanente, que faz um estudo semelhante para uma viatura de dois eixos. Em seguida, é simulada a execução de uma manobra evasiva dupla a baixas velocidades, e os resultados obtidos são qualitativamente analisados.

2. Método dos transformadores cinemáticos aplicado na suspensão MacPherson e estudo da dinâmica veicular

A **figura 1** [1, 2] apresenta o mecanismo de uma suspensão dianteira direita tipo MacPherson. A suspensão é vinculada ao chassi nos pontos O, A e C. A caixa de direção do tipo pinhão e cremalheira é vinculada ao chassi no ponto L, localizado em sua linha central. O ponto F é a projeção do ponto D na linha BC, que representa o eixo longitudinal da coluna telescópica. O ponto J é a projeção de B na linha AO, que é o eixo em torno do qual o braço inferior AOB gira.

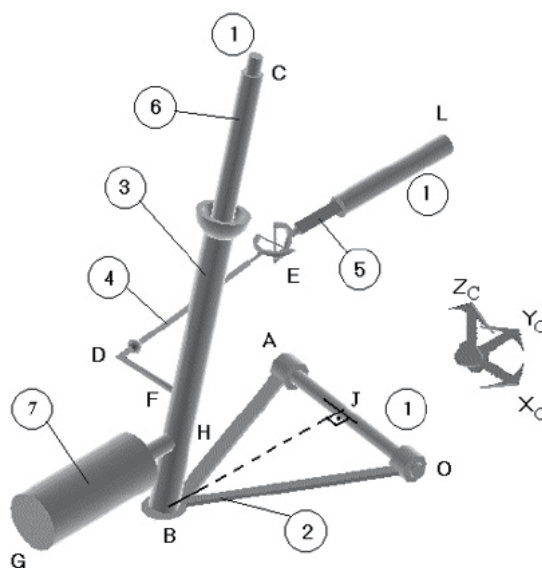


Fig. 1 – Mecanismo da suspensão dianteira tipo MacPherson. Fonte: [1].

As **tabelas 1 e 2** apresentam, respectivamente, o nome de cada elemento da suspensão e os seus graus de liberdade.

Tab. 1 – Nomenclatura dos corpos da suspensão MacPherson.

Número	Nomenclatura
1	Chassi
2	Braço inferior
3	Parte inferior da coluna telescópica
4	Barra de direção
5	Cremalheira de direção
6	Parte superior da coluna telescópica
7	Ponteira do eixo

Fonte: [2].

Tab. 2 – Juntas da suspensão MacPherson e respectivos graus de liberdade.

Número	Tipo de junta	Número de graus de liberdade
Eixo OA	Revolução	1
Centro B	Esférica	3
Eixo BC	Telescópica	2
Centro C	Universal	2
Centro D	Esférica	3
Centro E	Universal	2
Eixo Y	Translação	1
Eixo HG	Revolução	1

Fonte:[2].

Apesar de ser apresentada a suspensão da posição dianteira direita, as demais suspensões são modeladas similarmente.

São considerados como graus de liberdade do mecanismo da **figura 1**:

- Deslocamento angular do braço inferior em relação ao chassi (q_1);
- Rotação da roda em torno de 7 (q_2);
- Deslocamento linear da cremalheira (q_3).

O referencial da suspensão é representado pelos vetores \underline{f} , \underline{g} e \underline{h} , e está centrado no ponto J. O vetor \underline{f} está contido no segmento AO, orientado de O até A. O vetor \underline{g} é o vetor unitário perpendicular ao vetor \underline{e} e ao vetor \underline{z} do referencial do chassi (Z_c), sendo obtido do produto vetorial $\underline{Z}_c \underline{e}$. Por último, o vetor \underline{h} é perpendicular aos

vetores \underline{f} e \underline{g} , obtido do produto vetorial $\underline{f} \underline{g}$.

$$\underline{f} = \underline{\overline{OA}} \underline{OC} \quad (1)$$

$$\underline{g} = \frac{\underline{\overline{Zc}} \underline{f}}{|\underline{\overline{Zc}} \underline{f}|} \quad (2)$$

$$\underline{h} = \underline{\overline{f}} \underline{g} \quad (3)$$

Além do referencial (fgh), define-se mais um referencial (fgh), obtido pela sequência de rotações 3 – 1 – 3 do primeiro referencial (ângulos de Euler). Assim, a sequência de rotações 3 – 1 – 3 é definida respectivamente pelos ângulos de Euler φ , θ , e ψ . Este novo referencial é necessário, tendo em vista a complexa inclinação da coluna telescópica. Ao final das três rotações, o novo referencial (fgh) é transladado ao ponto H, sua origem. Uma vez definido o novo referencial, parte-se para a modelagem da suspensão pelos transformadores cinemáticos. O conjunto da **figura 1** é dividido em dois transformadores, um referente ao mecanismo de suspensão, e o outro ao mecanismo de direção. A coluna telescópica é o elemento comum aos dois transformadores.

2.1 Primeiro transformador

O primeiro transformador engloba o movimento vertical da suspensão e inclui os corpos 1, 2, 3, 6 e 7, tendo dois graus de liberdade, que são o deslocamento angular do braço inferior e a rotação da roda. A **figura 2** mostra as coordenadas de junta e os corpos envolvidos nesse transformador.

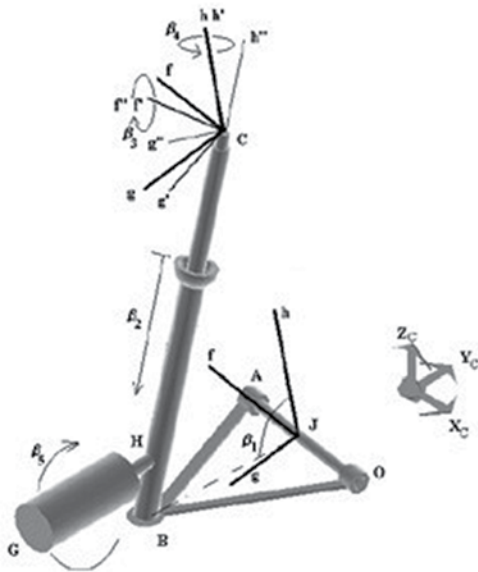


Fig. 2 – Coordenadas de junta e os corpos envolvidos no primeiro transformador cinemático da suspensão MacPherson. Fonte: [1].

As coordenadas de juntas β_1 , β_2 , β_3 e β_4 são, respectivamente, a rotação do braço inferior em torno do eixo AO, a translação entre os corpos 3 e 6 medida ao longo da linha BC, o segundo ângulo de Euler e , finalmente, o primeiro ângulo de Euler. A quinta coordenada de junta β_5 é o deslocamento angular da roda em torno de HG.

A terceira rotação de Euler para o caso deste transformador cinemático é desnecessária, uma vez que a rotação relativa entre os corpos 3 e 6 não é estudada. Porém, é relevante no segundo, pois resulta do movimento da cremalheira.

2.2 Segundo transformador

O segundo transformador engloba o esterçamento da roda comandado pela cremalheira da caixa de direção, envolvendo os corpos 1, 3, 4, 5 e 6, e possuindo apenas um

grau de liberdade, que é o deslocamento da cremalheira em relação ao chassi. A Fig. 3 mostra as coordenadas de junta e os corpos envolvidos nesse transformador.

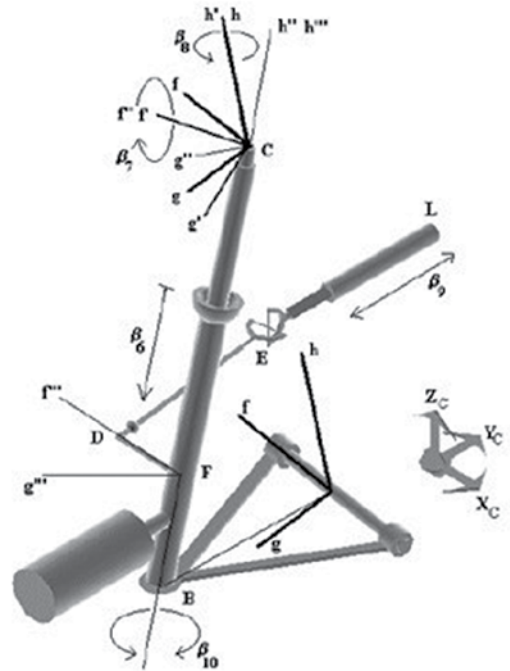


Fig. 3 – Coordenadas de junta e os corpos envolvidos no segundo transformador cinemático da suspensão MacPherson. Fonte: [1].

As coordenadas de juntas β_6 , β_7 e β_8 são respectivamente iguais a β_2 , β_3 e β_4 caracterizando assim que há acoplamento entre os dois transformadores. A quarta coordenada de junta β_9 corresponde ao deslocamento da cremalheira. A quinta coordenada de junta β_{10} representa a rotação relativa entre os corpos 3 e 6.

2.3 Equações de restrição

As equações de restrição obtidas a partir da configuração do mecanismo são:

$$g_1 = \beta_1 - q_1 \quad (4)$$

$$g_2 = \beta_2 - p + \sqrt{|JC|^2 \mp |JB|. (JC_g \cdot \text{sen}(\beta_1) \pm JC_h \cdot \text{cos}(\beta_1))} \quad (5)$$

$$g_3 = \beta_3 \cdot \text{acos} \left(\frac{JC_h - |JB| \cdot \text{cos} \beta_1}{p - \beta_2} \right) \quad (6)$$

$$g_4 = \beta_4 - \text{atan} \left(\frac{JC_f}{|JB| \text{sen} \beta_1 - JC_g} \right) \quad (7)$$

$$g_5 = \beta_5 - q_2 \quad (8)$$

$$g_6 = \beta_6 - \beta_2 \quad (9)$$

$$g_7 = \beta_7 - \beta_3 \quad (10)$$

$$g_8 = \beta_8 - \beta_4 \quad (11)$$

$$g_9 = \beta_9 - q_3 \quad (12)$$

$$g_{10} = [\beta_{10}]_i - \frac{\pi}{2} \cdot [\text{sgn}\{\text{sen} \beta_{10}\}_i] - 1 + \arccos[\text{sgn}\{\text{sen} \beta_{10}\}_i \cdot [\text{cos} \beta_{10}\}_i] \quad (13)$$

As **equações 4 a 8** compõem o vetor do primeiro transformador cinemático, enquanto as **equações 9 a 13** formam o segundo transformador.

2.4 Matriz jacobiana relativa e acoplamento entre o primeiro e segundo transformadores

A matriz jacobiana relativa é obtida por:

$$J_r = \begin{bmatrix} J_{\beta_1} & 0 \\ C_{12} & J_{\beta_2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Onde J_{β_1} and J_{β_2} são as matrizes de restrição do primeiro e segundo transformador, calculadas respectivamente por:

$$J_{\beta_1} = \frac{\partial g_1}{\partial \beta_1} \quad (15)$$

$$J_{\beta_2} = \frac{\partial g_2}{\partial \beta_2} \quad (16)$$

Nas **equações 15 e 16**, $\underline{\beta}_1$ é o vetor de coordenadas relativas do primeiro transformador, isto é, m vetor composto pelas coordenadas relativas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ e β_5 . E $\underline{\beta}_2$ é o vetor de coordenadas relativas do segundo transformador, composto pelas coordenadas relativas $\beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9$ and β_{10} . A matriz de acoplamento C_{21} é obtida por meio da relação entre as coordenadas relativas do segundo com o primeiro transformador.

$$\begin{bmatrix} \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \\ \beta_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} = -C_{21} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} \quad (17)$$

As matrizes V_1 e V_2 são matrizes compostas de elementos 0 e 1, obtidas por:

$$V_1 = -\frac{\partial g_1}{\partial q} \quad (18)$$

$$V_2 = -\frac{\partial g_2}{\partial q} \quad (19)$$

Onde é o vetor de graus de liberdade., composto por q_1, q_2 e q_3 . Portanto, essas matrizes são:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Os corpos da suspensão utilizados para obter a matriz jacobiana absoluta da suspensão MacPherson são os corpos 1, 2, 3 e 7. Uma vez obtidas as matrizes jacobianas absoluta e relativa de cada suspensão, a matriz jacobiana global de cada suspensão no referencial do chassi é calculada por:

$$J_g = J_a \cdot J_r \quad (24)$$

2.5 Matriz jacobiana absoluta e velocidades no referencial inercial

A velocidade do corpo i em um mecanismo pode ser expressa como uma combinação linear das coordenadas relativas do mecanismo:

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_{n_\beta} \\ \underline{b}_1 & \dots & \underline{b}_{n_\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dots \\ \dot{\beta}_{n_\beta} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Onde n_β é o número total de coordenadas relativas, r_i é a velocidade linear de um ponto (no caso, o CG) do corpo i e ω_i é sua velocidade angular. Juntando os vetores de todos os corpos i , obtém-se a matriz jacobiana absoluta:

$$J_a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n_{\beta 1}} \\ b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n_{\beta 1}} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n_{\beta 2}} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n_{\beta 2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n_B} & a_{2n_B} & \dots & a_{n_{\beta n_B}} \\ b_{1n_B} & b_{2n_B} & \dots & b_{n_{\beta n_B}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

2.5 Mudança do referencial do chassi para o referencial inercial

A velocidade no referencial inercial de um corpo i pode ser expressa como:

$$\dot{r}_i^I = \dot{r}_0^I + A_c \cdot \dot{r}_i^C - \Lambda \cdot \omega_0^I \quad (25)$$

Onde:

$$\Lambda = A_c \cdot r_i^C \quad (26)$$

Representa-se na forma matricial as velocidades linear e angular do corpo i da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_i^I \\ \omega_i^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\widetilde{\Lambda}_c & A_c & 0 \\ 0 & I & 0 & A_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r}_0^I \\ \omega_0^I \\ \dot{r}_i^C \\ \omega_i^C \end{bmatrix} \quad (27)$$

Onde $\widetilde{\Lambda}_c$ é o vetor Λ_c representado como matriz antissimétrica [4]. Com a finalidade de facilitar a representação, define-se:

$$K_i = \begin{bmatrix} I & -\tilde{A}_C \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$R_i = \begin{bmatrix} A_C & 0 \\ 0 & A_C \end{bmatrix} \quad (29)$$

e as velocidades linear e angular do chassi (\dot{S}_0^I) e do corpo i (\dot{S}_i^I) escritas no referencial inercial são representadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{S}_0^I \\ \dot{S}_1^I \\ \dot{S}_2^I \\ \vdots \\ \dot{S}_{n_c}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_1 & R_1 & 0 & \dots & 0 \\ K_1 & 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n_c} & 0 & 0 & \dots & R_{n_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Onde J_0 é a matriz jacobiana de restrição entre o chassi e o referencial inercial e q_0 é o vetor de graus de liberdade do chassi no referencial inercial.

2.5 Estudo da dinâmica veicular

Uma vez equacionada a cinemática, inicia-se o estudo dinâmico, onde são analisadas as forças atuantes no sistema. No caso deste trabalho, temos as seguintes forças atuantes:

2.5.1 Peso dos corpos

O centro de massa do braço inferior CG1 é localizado no seu baricentro, assumindo um corpo homogêneo. O centro de massa da coluna telescópica CG2 é localizado na interseção dela com o eixo da roda. O centro de massa da roda CG3 é localizado no seu centro geométrico, assumindo uma distribuição homogênea de massa (figura 4).

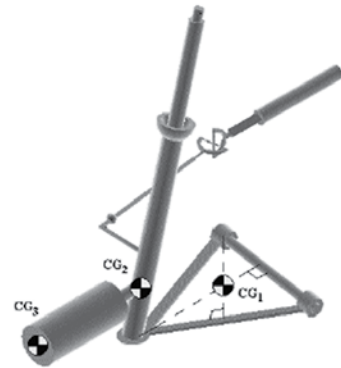


Fig. 4 – Representação dos centros de massa dos corpos da suspensão. Fonte: [2].

2.5.2 Força nos pneus

Os pneus sofrem forças normais de reação com o solo, além de forças laterais quando o motorista esterça o volante da direção. De acordo com [3], quando submetido a condições de esterçamento, o pneu sofre um desvio lateral representado pelo ângulo de deriva (α), medido entre a direção longitudinal do pneu e o seu vetor velocidade (figura 5).

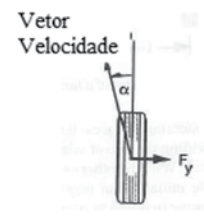


Fig. 5 – Ângulo de desvio do pneu, representado pelo ângulo α . Fonte: [3].

Para pequenos valores de α , a força lateral produzida pelo pneu é diretamente proporcional a este ângulo. A constante de proporcionalidade é o *cornering stiffness*.

$$F_y = C_{\alpha} \cdot \alpha \quad (32)$$

Tal parâmetro depende de diversos fatores, dentre os quais se destacam a carga vertical sobre o pneu e a pressão de enchimento. Devido à dependência da carga vertical, define-se o *cornering coefficient* CC_{α} como:

$$C_{\alpha} = CC_{\alpha} \cdot F_z \quad (33)$$

2.5.3 Forças de suspensão

Assume-se que a força produzida pela suspensão tem a mesma direção que a coluna telescópica, pois a mola e o amortecedor são considerados coaxiais. O estudo dinâmico é feito por meio do princípio de D'Alembert:

$$M(q) \cdot \ddot{q} + B(q, \dot{q}) = Q(q, \dot{q}) \quad (34)$$

Onde M é a matriz de inércia de todos os elementos, B é o vetor de forças giroscópicas e Q é o vetor de forças externas.

3. Resultados das simulações

O software MATLAB® foi utilizado para desenvolver o modelo computacional. A rotina empregada para a solução das equações diferenciais da dinâmica é o veículo é o método de Gear [7], que no MATLAB® corresponde à função `ode15s`.

Os parâmetros do veículo utilizados na simulação estão apresentados nas **tabelas 3 a 8**, e foram extraídos de [1] e [5]. Os parâmetros

de inércia e das molas e amortecedores foram extraídos de [3], e o parâmetro do pneu, de [2]. As condições iniciais da simulação estão apresentadas na **tabela 9**. O veículo é abandonado de uma posição onde não há contato com o solo, sendo inicialmente submetido unicamente à ação do próprio peso.

Tab. 3 – Parâmetros da suspensão MacPherson

Elemento	Medida
Coluna telescópica	0,685 m
Pos. CG1 relativa à reta OA	72,0567 mm
JB	304,5595 mm
JC	640,7511 mm
CL	743,1379 mm
DE	336,3819 mm
FB	159,9858 mm
FD	126,4387 mm
HB	103,7989 mm
HG	77,9031 mm
Comprimento livre das molas	330 mm
Curso da mola na suspensão	260 mm

Tab. 4 – Massas e momentos de inércia do chassi

M_C	I_x (kg.m ²)	I_y (kg.m ²)	I_z (kg.m ²)
1.247 kg	209,6	1240,1	139,9

Tab. 5 – Massas e momentos de inércia dos corpos

Corpo	M (kg)	I_x (kg m ²)	I_y (kg m ²)	I_z (kg m ²)
1	4	0,22	0,22	0,04
2	37,6	0,50	1,00	1,00
3	15	0,38	0,38	0,67

Tab. 6 – Const. de rigidez e de amort. da suspensão e do pneu

Corpo	Const. de rigidez, k (N/m)	Const. de amortecimento, c
Suspensão	38.600	1.471 Ns/m (dianteira e intermediária) 1.962 Ns/m (traseira)
Pneu	200.000	-

Tab. 7 – Dimensões do pneu

Largura do pneu	Aspect ratio	Diâmetro da roda
215 mm	60%	15 pol

Tab. 8 – Posição do ponto j de cada suspensão em relação ao centro de gravidade do carro

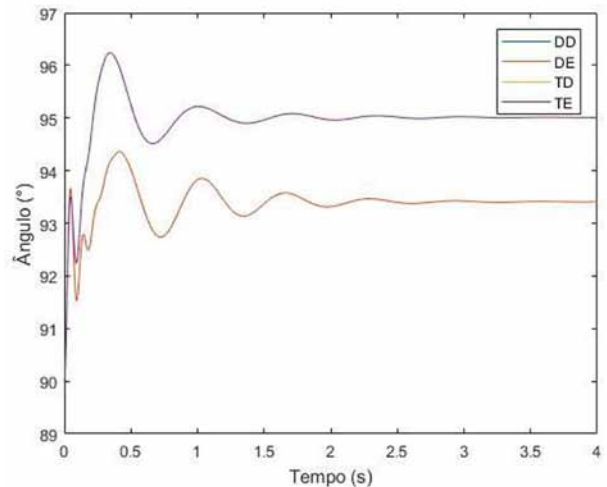
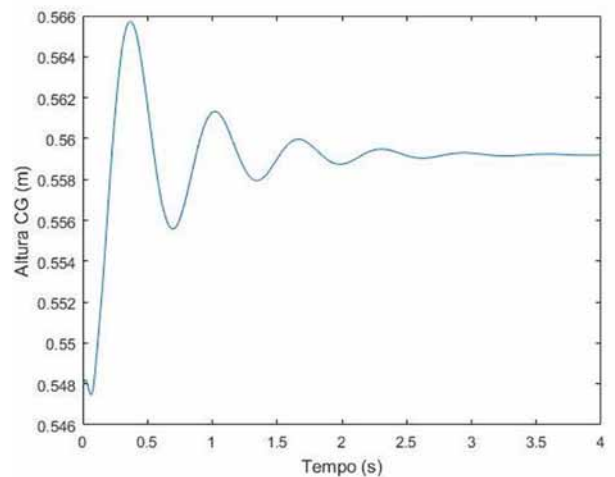
Suspensão	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
DD	1.170	-600	0
DE	1.170	600	0
ID	0	-600	0
IE	0	600	0
TD	-1.290	-600	0
TE	-1.290	600	0

Tab. 9 – Condições iniciais da simulação

Grau de liberdade	Pos. inicial	Vel. inicial
XCG	0 m	0 m/s
YCG	0 m	0 m/s
ZCG	0,548 m	0 m/s
Roll	0°	0 rad/s
Pitch	0°	0 rad/s
Yaw	0°	0 rad/s
	90°	0 rad/s

São apresentados os gráficos do ângulo entre o braço inferior e o chassi, altura do centro de gravidade do veículo em relação ao solo e ângulo de câmbor das rodas, apresentados

respectivamente pelas Fig. 6, 7 e 8. DD é a suspensão dianteira direita, DE, dianteira esquerda, TD, traseira direita e TE, traseira esquerda.

**Fig. 6** – Ângulo do braço inferior com o chassi.**Fig. 7** – Altura do centro de gravidade em relação ao solo.

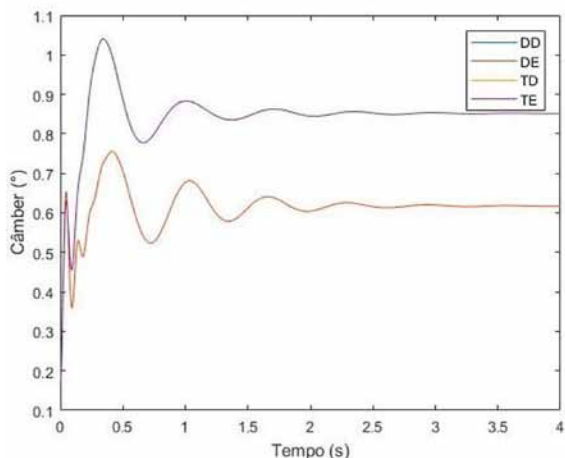


Fig. 8 – Ângulo de câmbor das rodas.

Os gráficos apresentados nas **figuras 6 a 8** são iguais aos obtidos por [5].

Na **figura 7**, observa-se as oscilações amortecidas do CG do veículo, que atinge o regime permanente após 3,5 s. A altura do CG do carro é de 559 mm.

Foi possível verificar a superposição dos gráficos das rodas dianteira esquerda e dianteira direita nas **figuras 6 a 8**, tendo em vista a simetria do veículo em relação ao seu plano longitudinal. Esta mesma superposição é verificada entre as suspensões traseira direita e traseira esquerda. No equilíbrio, as suspensões dianteiras assumem um ângulo entre bandeja e o chassi de $93,4^\circ$, e as suspensões traseiras assumem um ângulo de 95° . Esta diferença de ângulo deve-se ao posicionamento do centro de gravidade, levemente mais próximo do eixo dianteiro.

Na **figura 8**, o ângulo de câmbor na condição de equilíbrio é de $0,616^\circ$ para as rodas dianteiras e $0,852^\circ$ para as rodas traseiras. O motivo desta diferença é que o peso maior suportado pelo eixo dianteiro faz com que o ângulo da roda com o solo seja menor.

A partir do modelo de veículo de dois eixos apresentado, foi desenvolvido o modelo de três

eixos. Para isso, o novo eixo (eixo intermediário) foi acrescentado repetindo os mesmos parâmetros da suspensão dianteira. Todos os parâmetros são os mesmos utilizados em [5].

Ao adicionar um novo eixo ao veículo, foi necessário reduzir a pré-carga de cada mola utilizada no modelo de dois eixos. De fato, ao acrescentar um novo eixo ao veículo, as forças contrárias ao peso (forças de suspensão) aumentam, e caso a pré-carga seja muito alta, o somatório das forças de suspensão seria tal que estas operariam nos limites de seus batentes.

A pré-carga na mola é calculada em função da diferença entre o comprimento livre da mola e o seu comprimento de curso máximo na suspensão. Segundo a **tabela 3**, esta diferença era de $330 - 260 = 70$ mm, sendo reduzida para $300 - 260 = 40$ mm. Assim, foram obtidos os gráficos de 9 a 12 para o veículo de dois eixos e de três eixos, quando submetidos unicamente à ação dos próprios pesos (D3E, I3E e T3E são os ângulo dos braços inferiores do eixo dianteiro, intermediário e traseiro do veículo de 3 eixos, e D2E e T2E o ângulo dos braços inferiores dos eixos dianteiro e traseiro do veículo de 2 eixos):

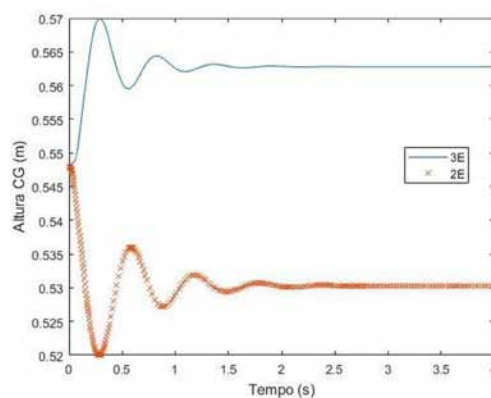


Fig. 9 – Posição vertical do chassi quando submetido unicamente ao próprio peso (2E, veículo de 2 eixos; 3E, veículo de 3 eixos).

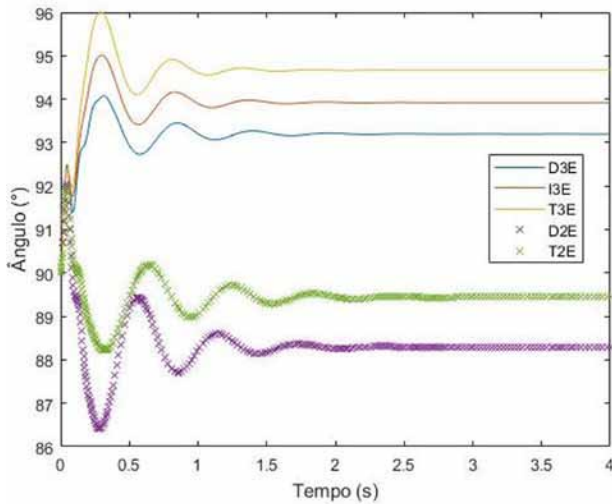


Fig. 10 – Ângulo do braço inferior quando o veículo é submetido à ação do próprio peso.

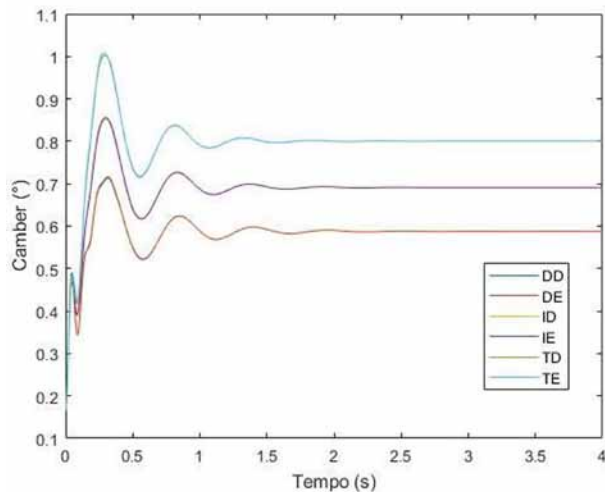


Fig. 11 – Ângulo de câmbio. (DD, DE, ID, IE, TD e TE: rodas diante. direita, diante. esquerda, interm. direita, interm. esquerda, tras. direita e tras. esquerda, respectivamente).

Analisa-se qualitativamente os resultados obtidos de acordo com o que se espera da natureza do mecanismo, e da comparação entre os veículos de dois com o de três eixos.

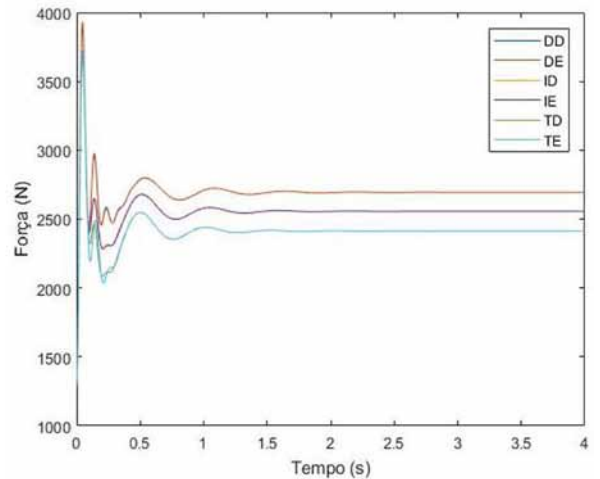


Fig. 12 – Força vertical em cada roda.

Como se espera, como apresentado na **figura 9**, para um veículo de três eixos, a altura do centro de gravidade é maior do que a altura com dois eixos, devido à presença de mais um eixo que exerce forças de suspensão no chassi, já que o peso da massa suspensa é o mesmo para ambos. Vale também notar que, como a pré-carga da mola reduziu, o veículo com dois eixos atinge uma posição inferior à sua posição inicial, algo que não ocorria anteriormente, com uma maior pré-carga. Ou seja, a mola deve deformar mais para suportar o peso do veículo.

Vale notar, no comportamento do ângulo do braço inferior da **figura 10**, que o ângulo das rodas de um mesmo eixo é igual, devido à simetria do veículo no plano longitudinal. Observa-se que o movimento do braço inferior acompanha o movimento do centro de gravidade do veículo.

O ângulo de câmbio e a força vertical em cada roda são apresentados nas **figuras 11 e 12**.

Observa-se que o eixo dianteiro suporta maior carga, seguido do eixo intermediário e por último o eixo traseiro. Essa diferença explica os valores pertinentes às rodas dianteiras ser menor, seguido das rodas intermediárias e das rodas traseiras. Observa-se também a mesma carga suportada nas rodas de mesmo eixo, ocasionando mesmo ângulo de câmbio. O sistema atinge o equilíbrio estático em $t = 3,5$ s aproximadamente.

No instante $t = 8$ s, o modelo de três eixos inicia a manobra evasiva dupla [8], na pista ilustrada na **figura 13**, cuja largura depende das dimensões do veículo. A velocidade de execução do teste é de 28 km/h, uma velocidade baixa o suficiente para que a força lateral dos pneus seja uma função linear do seu ângulo de desvio. Além disso, é considerado um *cornering stiffness* de $0,2$ N/°, de acordo com [3].

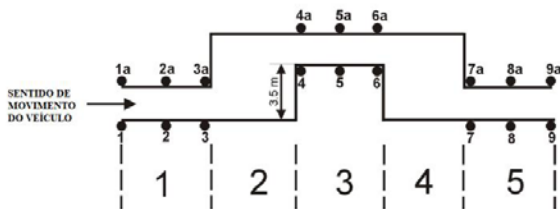


Fig. 13 – Vista superior de uma manobra evasiva dupla.

Os resultados da simulação são apresentados nas **figuras 14 a 19**:

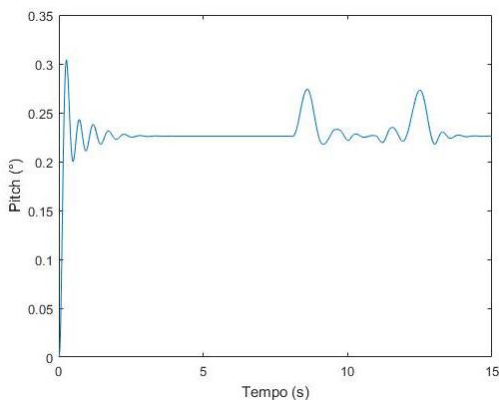


Fig. 14 – Ângulo de *pitch* do veículo.

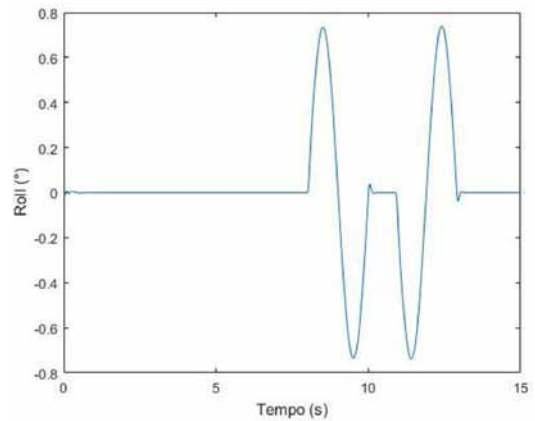


Fig. 15 – Ângulo de *roll* do veículo.

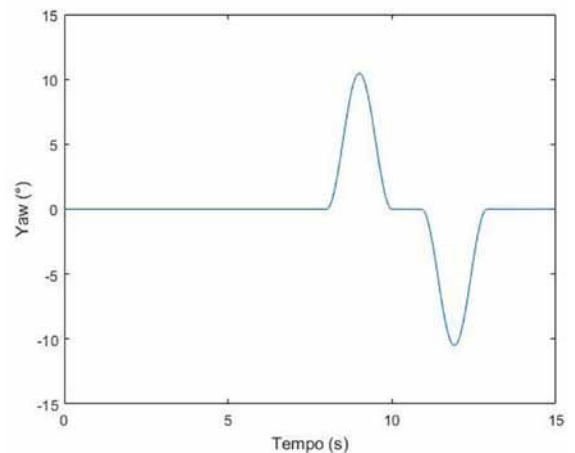


Fig. 16 – Ângulo de *yaw* do veículo.

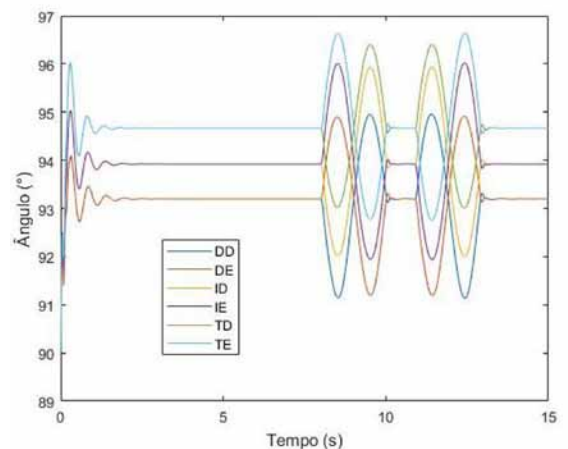


Fig. 17 – Ângulo do braço inferior com o chassi.

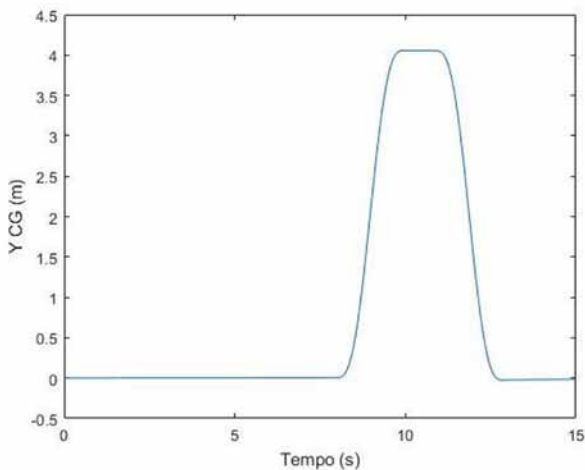


Fig. 18 – Posição absoluta y do centro de gravidade do chassi.

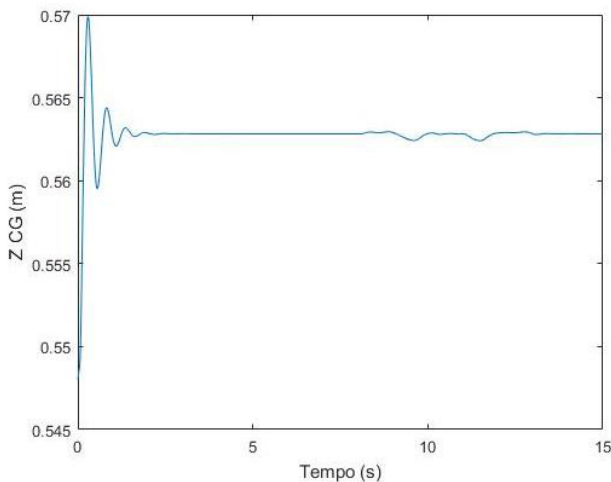


Fig. 19 – Posição vertical do chassi.

Na manobra evasiva dupla, o veículo em trajetória retilínea realiza uma curva para a esquerda, acertando em seguida a direção de movimento paralelamente à direção inicial. Em seguida, é feita uma curva para a direita de forma a voltar para a mesma reta do movimento inicial.

O ângulo de *pitch* sofre uma variação positiva com a curva para a esquerda, conforme apresentado

na **figura 14**, indicando que a carroceria inclina-se para baixo, em leve mergulho (referencial ISO 8855). O comportamento quando o veículo faz a curva para a direita é simétrico, tendo em vista a simetria da curva realizada.

O comportamento do ângulo de *roll*, observado na **figura 15**, deve-se à transferência dinâmica de peso, de forma que o veículo inclina-se para o lado oposto ao que faz curva. Verifica-se que o gráfico fica espelhado quando o veículo faz a curva para a esquerda e para a direita, em virtude de sua simetria lateral. O ângulo de *yaw* tem comportamento semelhante ao ângulo de *roll*, conforme apresentado na **figura 16**, em virtude desta simetria.

Como a curva inicia para a esquerda, os valores dos ângulos dos braços inferiores com o chassi dessas suspensões aumentam, tendo em vista a transferência dinâmica de peso para a direita, conforme observado na **figura 17**. Em contrapartida, as suspensões do lado direito apresentam comportamento oposto. Quando a curva é feita para a direita, a situação se inverte.

O gráfico da **figura 18** mostra que o CG da carroceria se desloca para a esquerda na direção y, retomando em seguida sua posição original

Ao realizar a curva, o CG do veículo apresenta deslocamento vertical, em virtude do movimento combinado de rolagem e arfagem do chassi, como se pode observar na **figura 19**. Observa-se que essa alteração é simétrica, tendo em vista a simetria da curva realizada.

4. Conclusão

A redução do número de equações de movimento é um dos principais benefícios da modelagem por transformadores cinemáticos. Trabalhando-se com um conjunto de coordenadas

mínimas, é possível equacionar o comportamento cinemático do mecanismo ao longo do tempo.

Outra vantagem da modelagem por transformadores cinemáticos é a viabilidade de considerar as não-linearidades do sistema mecânico. Com isso, é possível analisar o esterçamento das rodas e os ângulos de geometria das suspensões, além do comportamento das peças da suspensão, não sendo viável em modelos mais simples como o massa-mola.

Destaca-se também na modelagem por transformadores cinemáticos a modularidade, sendo possível a substituição de blocos de equações e conservando-se as demais equações do sistema. Com isso, pode-se comparar o desempenho do novo modelo desenvolvido com o antigo. Assim, é possível que se acrescente o conjunto das equações pertinentes ao terceiro eixo do veículo de forma modular, sem alterar significativamente o equacionamento geral, bastando inserir tais

equações nas posições correlatas das matrizes jacobianas.

O viés desse tipo de modelagem é o trabalho envolvido no seu equacionamento. As derivadas parciais de certas matrizes, calculadas simbolicamente, apresentam equações muito extensas e que não expõem claramente a relação de causa e efeito.

Observa-se que os resultados obtidos nas simulações são qualitativamente coerentes com o esperado para um veículo com as características definidas referentes a sua geometria e à inércia dos seus elementos. Analisando comparativamente os modelos desenvolvidos de dois eixos e três eixos, verifica-se o comportamento similar de ambos. A diferença acusada na simulação do veículo de três eixos se deve à presença do terceiro eixo e sua localização na carroceira; acrescentar um eixo no veículo implica em acrescentar mais uma fonte de esforços no chassi.

Referências Bibliográficas

- [1] COSTA NETO, R.T, GÓIS, J. A. M., SARZETO, C. A. P. Vehicle Model using Kinematical Transformers. Proceedings of the IX DINAME, 5-9 March 2001, Florianópolis, SC, Brasil.
- [2] COSTA NETO, R.T.. Modelo de veículo tipo 4WS utilizando transformadores cinemáticos. Tese (mestrado). Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2001.
- [3] GILLESPIE, T.D. "Fundamentals of Vehicle Dynamics". Society of Automotive Engineers, Warrendale, USA, 1992.
- [4] HAUG, E. Computer aided cynamics and dynamics of mechanical systems: basic methods. Pearson College Division, 1989.
- [5] JAZAR, R.N. "Vehicle Dynamics: Theory and Application", Springer, New York, USA, 2009.
- [6] NEVES, M.R.R.. Análise da estabilidade lateral de um veículo tridimensional. Dissertação (mestrado). Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2002.
- [7] PDF Documentation for MATLAB. Mathworks, 2019. Disponível em: <https://la.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/index.html>. Acesso em: 01/08/2019.
- [8] Passenger cars – Test track for a severe lane-change manoeuvre – Part 1: Double-lane change. ISO 3888-1, International Organization for Standardization, 1999.