

Modelagem dinâmica pelo método dos elementos finitos para análise de vibrações em estruturas espaciais sujeitas a esforços externos

Ricardo L O Rosa*, Maurício Gruzman

Instituto Militar de Engenharia (IME)

Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270, Praia Vermelha, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.

*ricardoliveira.eng@gmail.com

RESUMO: A modelagem dinâmica de estruturas espaciais é utilizada em diversos tipos de projetos que visam construir estruturas tridimensionais, permitindo a análise e simulação da estrutura por meios computacionais, prevendo o comportamento do sistema e possibilitando a correção de parâmetros do projeto antes da construção de um protótipo ou produto. Este trabalho se propõe a apresentar em detalhes os passos para a modelagem dinâmica de uma estrutura espacial utilizando o método dos elementos finitos (MEF), representando cada seção reta regular do sistema como um elemento finito unidimensional (EFU). O modelo adotado para demonstrar a metodologia, formado por oito EFUs, apresentou resultados compatíveis com a solução analítica para as deformações na estrutura em decorrência da força gravitacional e comportamento vibracional condizente com uma estrutura física real ao ser perturbada inicialmente por uma determinada força de impulso. Concluiu-se ao final que o método apresentado pode ser utilizado com eficácia na modelagem dinâmica vibracional de estruturas espaciais.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Dinâmica. Vibrações. Estruturas Espaciais. Método dos Elementos Finitos. Elementos Finitos Unidimensionais.

ABSTRACT: The dynamic modeling of spatial structures is used in several types of projects that aim to build three-dimensional structures, allowing the analysis and simulation of the structure by computational means, predicting behavior of the system and enabling the correction of project parameters before the construction of a prototype or product. This paper aims to present a methodology for dynamic modeling of spatial structures using the finite element method (FEM), representing each regular straight section of the system as a one-dimensional finite element (OFE). The model adopted to demonstrate the methodology, formed by eight OFEs, presented results compatible with the analytical solution for deformations in the structure due to gravitational force and vibrational behavior consistent with a real physical structure when initially disturbed by a certain impulse force. It was concluded at the end that the presented method can be used effectively in the vibrational dynamic modeling of spatial structures.

KEYWORDS: Dynamic Modeling. Vibrations. Space Structures. Finite Element Method. One-dimensional Finite Elements.

1. Introdução

Em diversos campos da engenharia a utilização de estruturas físicas é fundamental, seja para um invólucro ou carcaça de algum aparelho eletrônico, para a armação de um prédio, treliças que suportarão um teto, plataformas, chassis de veículos, dentre tantas outras aplicações.

Com a evolução das ferramentas computacionais, tornou-se cada vez mais comum e acessível a utilização de simulações que permitem realizar testes preliminares nos projetos das estruturas antes de construir o protótipo ou produto. Com isso, detecta-

se a necessidade de ajustes e correções no projeto por meio da simulação que leva à economia de recursos e menor tempo para se chegar ao produto.

Com relação à modelagem dinâmica e simulação de estruturas espaciais, uma das características dinâmicas mais relevantes analisadas nos projetos é a vibração, pois se a frequência angular de excitação externa (força externa que age na estrutura) coincidir com uma das frequências angulares naturais de vibração do sistema, ocorrerá o fenômeno de ressonância, causando o colapso da estrutura, como o caso exemplificado por [1] da ponte de Tacoma, que se rompeu devida a ressonância causada pela vibração

induzida pelo vento. Diversos autores já abordaram formas de se realizar a modelagem dinâmica de uma estrutura, como [2], que modelou pelo MEF uma estrutura espacial do tipo treliça baseada em estruturas espaciais utilizadas em satélites. Em [3], utiliza-se uma análise modular pela técnica dos grafos de ligação para um sistema composto por uma viatura e um subsistema de armas instalado que permite que os subsistemas veículo e armamento sejam analisados separadamente e em conjunto. Os autores de [4,5] modelaram um tubo de armamento como uma estrutura flexível sujeita a carga móvel (representando um disparo) pelo MEF. Por meio desta última análise, [4] propôs a inclusão de um absorvedor passivo de vibrações que permitiu reduzir a amplitude das oscilações em cerca de 46% nas simulações realizadas, demonstrando a eficácia e otimização que simulações podem trazer a um projeto.

O presente artigo se propõe a apresentar, de maneira concisa, uma metodologia para aplicar o MEF na modelagem dinâmica de estruturas espaciais diversas, demonstrando por meio da aplicação do método em uma estrutura simples composta por oito elementos, com o objetivo de prever e analisar o comportamento vibracional do sistema.

2. Fundamentação teórica

A presente fundamentação teórica para a modelagem dinâmica e análise de vibrações pelo MEF se baseia principalmente nas obras de [1,6,7]. Cada EFU que compõe a estrutura é modelado como um elemento espacial (ES), que é formado pela combinação dos quatro tipos de EFU básicos, de barra (EB), eixo (EE), viga plana vertical (VV) e de viga plana horizontal (VH), e possui doze graus de liberdade (GL) conforme mostrado na **tabela 1**. A **figura 1** apresenta os quatro EFU básicos e a **figura 2** apresenta o ES com seus respectivos sistemas de coordenadas e deslocamentos relacionados a cada GL.

Tab. 1 – Tipos de elementos finitos unidimensionais.

Elemento	Deslocamentos possíveis	GL
Barra	Colinear ao seu eixo longitudinal x	2
Eixo	Rotacional em torno do seu eixo longitudinal x	2
Viga Plana Vertical	Transversal ao seu eixo longitudinal x, no sentido de seu eixo vertical y e rotacional em torno do seu eixo transversal horizontal z	4
Viga Plana Horizontal	Transversal ao seu eixo longitudinal x, no sentido do seu eixo horizontal z e rotacional em torno de seu eixo transversal vertical y	4
Geral ou Espacial	Colinear ao seu eixo longitudinal x, transversal ao seu eixo longitudinal x, no sentido do seu eixo horizontal z e vertical y e rotacional em torno de seus eixos x, y e z	12

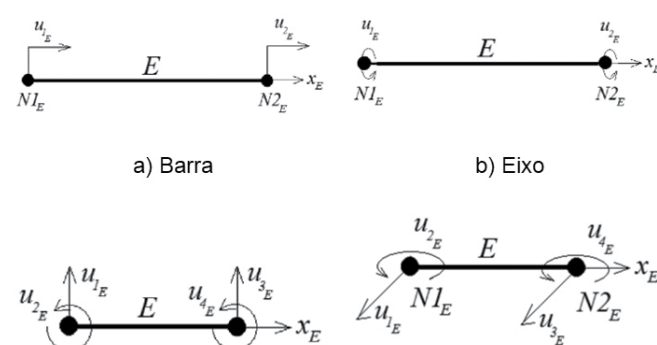


Fig. 1 – EFU básicos. Fonte: [7] (adaptada).

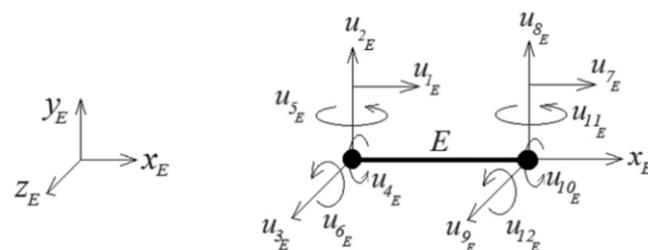


Fig. 2 – Elemento Espacial. Fonte: [7] (adaptada).

Deseja-se, com a modelagem dinâmica, simular o comportamento da estrutura quando sujeita a esforços externos representados pelo vetor f . Os deslocamentos ou vibrações que ocorrem no sistema são representados pelo vetor de deslocamentos u , um vetor composto pelos deslocamentos de cada grau de liberdade do sistema que é calculado conforme a **equação 1**, onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do sistema.

$$[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = f \quad (1)$$

Para calcular \mathbf{u} , deve-se determinar antes as matrizes $[M]$ e $[K]$ do sistema, que por sua vez são determinadas pelas respectivas matrizes $[K]_{Ei}$ e $[M]_{Ei}$ dos elementos Ei que compõem o sistema. A matriz $[C]$ é obtida de maneira proporcional após a obtenção de $[K]$ e $[M]$, conforme será visto nas seções seguintes.

2.1 Obtenção das matrizes de rigidez e de massa para os elementos

As matrizes $[K]_{Ei}$ e $[M]_{Ei}$ dos elementos que compõem o sistema utilizadas neste artigo correspondem às matrizes de ES, ou seja, $[K]_{ES}$ e $[M]_{ES}$, uma vez que com essas matrizes todos os deslocamentos possíveis dos quatro EFU básicos são contemplados.

Uma vez calculadas as matrizes de rigidez $[K]_{EX}$ conforme **equações 2 a 5**, para os elementos básicos $X = EB, EE, EVV$ e EVH respectivamente, calcula-se a matriz $[K]_{ES}$ por meio da **equação 6**, em que ${}_{EX}[T]_{ES}$ é a matriz que correlaciona o vetor de deslocamentos do ES com o do elemento básico EX , ou seja, $u_{EX} = {}_{EX}[T]_{ES} u_{ES}$.

$E_{E'}, A_{E'}, L_{E'}, G_{E'}, J_E$ e I_E são respectivamente: o módulo de elasticidade, a área transversal, o comprimento, módulo de elasticidade transversal, momento polar de inércia da seção transversal e momento de inércia da seção transversal do elemento E .

$$[K]_{EB} = \frac{E_E A_E}{L_E} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[K]_{EE} = \frac{G_E J_E}{L_E} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[K]_{EVV} = \frac{E_E I_E}{L_E^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_E & -12 & 6L_E \\ 6L_E & 4L_E^2 & -6L_E & 2L_E^2 \\ -12 & -6L_E & 12 & -6L_E \\ 6L_E & 2L_E^2 & -6L_E & 4L_E^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[K]_{EVH} = \frac{E_E I_E}{L_E^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_E & -12 & -6L_E \\ -6L_E & 4L_E^2 & 6L_E & 2L_E^2 \\ -12 & 6L_E & 12 & 6L_E \\ -6L_E & 2L_E^2 & 6L_E & 4L_E^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[K]_{ES} = {}_{EB}[T]_{ES}^T \cdot [K]_{EB \cdot EB} [T]_{ES} + {}_{EE}[T]_{ES}^T \cdot [K]_{EE \cdot EE} [T]_{ES} + {}_{EVV}[T]_{ES}^T \cdot [K]_{EVV \cdot EVV} [T]_{ES} + {}_{EVH}[T]_{ES}^T \cdot [K]_{EVH \cdot EVH} [T]_{ES} \quad (6)$$

Assim como foi feito para o cálculo de $[K]_{EX}$, calcula-se $[M]_{EX}$ conforme **equações 7 a 10** para os elementos básicos EB, EE, EVV e EVH respectivamente, onde ρ_E é a massa específica do material do elemento E , e então, calcula-se $[M]_{ES}$ por meio da **equação 11**.

$$[M]_{EB} = \frac{\rho_E A_E L_E}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[M]_{EE} = \frac{\rho_E J_E L_E}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[M]_{EVV} = \frac{\rho_E A_E L_E}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_E & 54 & -13L_E \\ 22L_E & 4L_E^2 & 13L_E & -3L_E^2 \\ 54 & 13L_E & 156 & -22L_E \\ -13L_E & -3L_E^2 & -22L_E & 4L_E^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[M]_{EVH} = \frac{\rho_E A_E L_E}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_E & 54 & 13L_E \\ -22L_E & 4L_E^2 & -13L_E & -3L_E^2 \\ 54 & -13L_E & 156 & 22L_E \\ 13L_E & -3L_E^2 & 22L_E & 4L_E^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[M]_{ES} = {}_{EB}[T]_{ES}^T \cdot [M]_{EB \cdot EB} [T]_{ES} + {}_{EE}[T]_{ES}^T \cdot [M]_{EE \cdot EE} [T]_{ES} + {}_{EVV}[T]_{ES}^T \cdot [M]_{EVV \cdot EVV} [T]_{ES} + {}_{EVH}[T]_{ES}^T \cdot [M]_{EVH \cdot EVH} [T]_{ES} \quad (11)$$

2.2 Obtenção das matrizes de rigidez e de massa para a estrutura

Depois de calculadas $[K]_{Ei}$ e $[M]_{Ei}$ calcula-se as matrizes de rigidez e de massa para o sistema, $[K]$ e $[M]$ respectivamente, por meio das **equações 12 e 13**.

$$[K] = \sum_{i=1}^n {}_{Ei}[T]_G^T \cdot [K]_{Ei \cdot Ei} [T]_G \quad (12)$$

$$[M] = \sum_{i=1}^n {}_{Ei}[T]_G^T \cdot [M]_{Ei \cdot Ei} [T]_G \quad (13)$$

2.3 Considerações de engastamento nas equações de movimento da estrutura

Quando existirem restrições físicas a determinados deslocamentos da estrutura, os tornando nulos, esta condição deve ser levada em conta na modelagem eliminando-se nos vetores da **equação 1** as linhas e nas matrizes as linhas e as colunas correspondentes a esses deslocamentos.

2.4 Frequências angulares naturais de vibração

Um sistema com n graus de liberdade possuirá n modos de vibração. Cada modo de vibração X_i está associado a uma frequência angular natural de vibração ω_m . Esses valores podem ser encontrados resolvendo a **equação 14**.

$$[K] - \omega_n^2[M]X = 0 \quad (14)$$

2.5 Obtenção da matriz de amortecimento

Uma vez obtidas as matrizes $[K]$ e $[M]$ do sistema, já reduzidas considerando as restrições de movimento conforme descrito na seção 2.3, calcula-se a matriz de amortecimento $[C]$ pela **equação 15**, conforme método apresentado em [1, 8], onde as constantes de proporcionalidade α e β são determinadas pelas **equações 16 e 17**, conhecendo-se previamente os fatores de amortecimento ξ_i (relacionados aos modos de vibração i).

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{2\omega_{n_1}\omega_{n_2}(\xi_1\omega_{n_2} - \xi_2\omega_{n_1})}{\omega_{n_2}^2 - \omega_{n_1}^2} \quad (16)$$

$$\beta = \frac{2(\xi_2\omega_{n_2} - \xi_1\omega_{n_1})}{\omega_{n_2}^2 - \omega_{n_1}^2} \quad (17)$$

2.6 Forças, elementos de rigidez e de massa que agem sobre os nós da estrutura

Quando forças externas, elementos de rigidez ou

elementos de massa agem sobre os nós da estrutura, para considerá-los no modelo, basta somar seus valores na posição dos vetores ou matrizes correspondentes. Para o vetor coluna f , soma-se o valor das forças externas na linha correspondente ao deslocamento do mesmo nó onde a força é aplicada e de mesmo sentido. Para as matrizes $[K]$ e $[M]$, soma-se os valores dos elementos de rigidez e de massa, respectivamente, na posição da diagonal principal igual ao índice do deslocamento do mesmo nó e sentido desses elementos.

2.7 Funções de interpolação dos elementos básicos

Para obter aproximações para o deslocamento em um ponto intermediário $0 < x_E < L_E$ aos nós de um determinado elemento E , ou forças equivalentes que agem sobre os nós em decorrência de forças concentradas ou distribuídas entre os nós, usa-se as funções de interpolação ψ conforme descrito em [7] e apresentadas pelas **equações 18 e 19** para o EB e EVV respectivamente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{1EB} = 1 - \frac{x_E}{L_E} \\ \psi_{2EB} = \frac{x_E}{L_E} \\ \psi_{EB} = [\psi_{1EB} \ \psi_{2EB}]^T \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{1EVV} = 1 - 3\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^2 + 2\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^3 \\ \psi_{2EVV} = L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right) - 2L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^2 + L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^3 \\ \psi_{3EVV} = 3\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^2 - 2\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^3 \\ \psi_{4EVV} = -L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^2 + L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^3 \\ \psi_{EVV} = [\psi_{1EVV} \ \psi_{2EVV} \ \psi_{3EVV} \ \psi_{4EVV}]^T \end{array} \right. \quad (19)$$

2.8 Forças externas distribuídas

Quando há forças externas distribuídas de função w_{dE} agindo sobre um elemento E , que possui n graus

de liberdade, calcula-se as parcelas equivalentes dessas forças que agem sobre cada nó do elemento utilizando a **equação 20**, onde $f_{d_{Ei}}$ é o vetor de forças equivalentes que agem sobre o elemento provenientes das forças externas distribuídas.

$$\begin{cases} f_{d_{1E}} = \int_0^{L_E} w_{d_E} \psi_{1E} \cdot dx_E \\ f_{d_{2E}} = \int_0^{L_E} w_{d_E} \psi_{2E} \cdot dx_E \\ \vdots \\ f_{d_{nE}} = \int_0^{L_E} w_{d_E} \psi_{nE} \cdot dx_E \\ \mathbf{f}_{d_E} = [f_{d_{1E}} \ f_{d_{2E}} \ \dots \ f_{d_{nE}}]^T \end{cases} \quad (20)$$

Após calculadas as forças distribuídas $f_{d_{Ei}}$ em cada elemento Ei da estrutura, calcula-se o vetor equivalente de forças distribuídas f_d na estrutura pela **equação 21**.

$$\mathbf{f}_d = \sum_{i=1}^n \cdot Ei [T]_G^T \cdot \mathbf{f}_{d_{Ei}} \quad (21)$$

2.9 Forças externas concentradas

Para forças externas concentradas $F_{c_{iE}}$ agindo entre os nós de um determinado elemento E , a uma distância x_{iE} medida no eixo de coordenadas do elemento a partir de sua origem, calcula-se as parcelas equivalentes dessas forças que agem sobre cada nó do elemento utilizando a **equação 22**, onde f_{ce_E} é o vetor de forças equivalentes que agem sobre o elemento provenientes das forças externas concentradas.

$$\begin{cases} f_{ce_{1E}} = \sum_{i=1}^q F_{c_{iE}} \psi_{1E}(x_{iE}) \\ f_{ce_{2E}} = \sum_{i=1}^q F_{c_{iE}} \psi_{2E}(x_{iE}) \\ \vdots \\ f_{ce_{nE}} = \sum_{i=1}^q F_{c_{iE}} \psi_{nE}(x_{iE}) \\ \mathbf{f}_{ce_E} = [f_{ce_{1E}} \ f_{ce_{2E}} \ \dots \ f_{ce_{nE}}]^T \end{cases} \quad (22)$$

Após calculadas as forças distribuídas $f_{ce_{Ei}}$ em cada elemento Ei da estrutura, calcula-se o vetor

equivalente de forças concentradas f_{ce} na estrutura pela **equação 23**.

$$\mathbf{f}_{ce} = \sum_{i=1}^n \cdot Ei [T]_G^T \cdot \mathbf{f}_{ce_{Ei}} \quad (23)$$

3. Método Utilizado

O método utilizado por este artigo para a simulação dinâmica da estrutura espacial é por implementação computacional, reduzindo o sistema de EDO de segunda ordem obtida pela **equação 1** a um sistema de EDO de primeira ordem, conforme mostrado na **equação 24**. Após realizar a referida redução de ordem, resolve-se o sistema de EDO pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4), que segundo [9], é o método de passo simples mais utilizado para a resolução computacional de um sistema de EDO por possuir boa precisão dos resultados e empregar uma expressão simples em sua implementação.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} \\ W = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}; A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [M]^{-1} \end{bmatrix}, U = \mathbf{f} \\ \dot{W} = AW + BU \end{cases} \quad (24)$$

4. Aplicação do método

O método utilizado foi implementado em MATLAB® e aplicou-se a uma estrutura espacial formada por oito tubos iguais, cada um modelado como um ES, conforme mostrado na **figura 3**. As propriedades dimensionais e estruturais dos tubos utilizados encontram-se na **tabela 2**.

Calculou-se as matrizes $[K]_{Ei}$ e $[M]_{Ei}$ dos elementos pelas **equações 6 e 11** respectivamente, e depois as matrizes $[K]$ e $[M]$ pelas **equações 12 e 13**. Após eliminar as linhas e colunas das matrizes $[K]$ e $[M]$ relativas aos índices dos deslocamentos dos nós N1, N3, N5 e N7, por estes estarem engastados, calculou-se a matriz $[C]$ pela **equação 15**, utilizando os valores $\xi_1 = \xi_2 = 0,03$, compatíveis com o material dos tubos segundo a literatura [4].

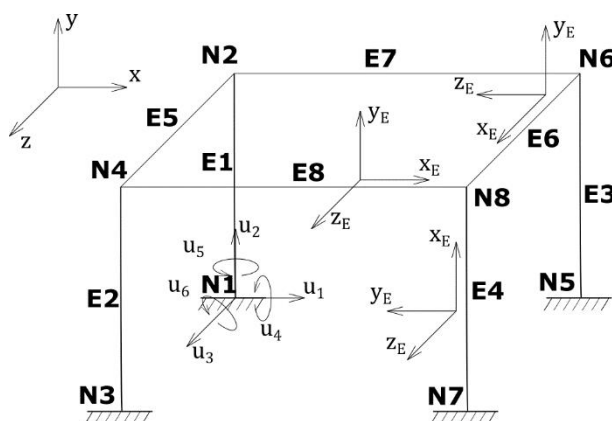


Fig. 3 – Estrutura espacial composta por oito tubos.

Tab.2 – Propriedades dimensionais e estruturais dos tubos utilizados

E_E	G_E	eP_E	De_E
$200 \times 10^9 \text{ Pa}$	$75 \times 10^9 \text{ Pa}$	$0,0050 \text{ m}$	$0,1300 \text{ m}$
Di_E	A_E	I_E	J_E
$0,1200 \text{ m}$	$0,0020 \text{ m}^2$	$3,8411 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	$7,6822 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
L_E		ρ_E	
$2,0000 \text{ m}$		7850 kg/m^3	

4.1 Acomodação do sistema devido ao peso da estrutura

Com relação aos esforços externos, a estrutura está sujeita a força distribuída devido ao seu peso. Considerando a função de força distribuída de peso, dada por $w_d = g\rho A_E$ com aceleração da gravidade $\mathbf{g} = -9,81\text{m/s}^2 \cdot \hat{y}$, aplica-se para os elementos de E1 a E4 a equação 20 utilizando as funções de interpolação de barra (equação 18), e para os elementos de E5 a E8 aplica-se a equação 20 utilizando as funções de interpolação de viga plana mostradas na equação 19. Com isso, tem-se os vetores $\mathbf{f}_{d_{Ei}}$, que podem ser escritos na conforma correspondente aos graus de liberdade da estrutura por meio das respectivas matrizes de correlação e somados para formar o vetor \mathbf{f}_d conforme equação 21.

Partindo-se da estrutura inicialmente sem deformação, as posições verticais dos nós localizados na parte superior da estrutura (N2, N4, N6 e N8) foram monitoradas até sua acomodação por conta do peso do sistema, como pode ser visto na figura 4.

4.2 Acomodação do sistema após sofrer um impulso externo simulando um disparo

Após a acomodação da estrutura devido ao seu próprio peso, simulou-se a execução de um disparo, pelo tempo de $t=0,01\text{s}$ e com força de $F_c = -8 \times g \text{ kgf} \cdot \hat{x}$, por sistema de arma fixo no centro da parte superior da estrutura (ponto P) por barras rígidas e de peso desprezível. O ponto P (figura 5), de coordenadas calculadas conforme equação 25, e a variação de azimute (az) e elevação (el) do vetor unitário \vec{p} , dado pela equação 26, foram monitorados após o disparo e até a acomodação da estrutura, tendo seus valores registrados ao longo do tempo de simulação e mostrados nas figuras 6 e 7 respectivamente.

$$P = \frac{N2 + N4 + N6 + N8}{4} \quad (25)$$

$$\vec{p} = \frac{(N8 - N2) \times (N6 - N4)}{\|(N8 - N2) \times (N6 - N4)\|} \quad (26)$$

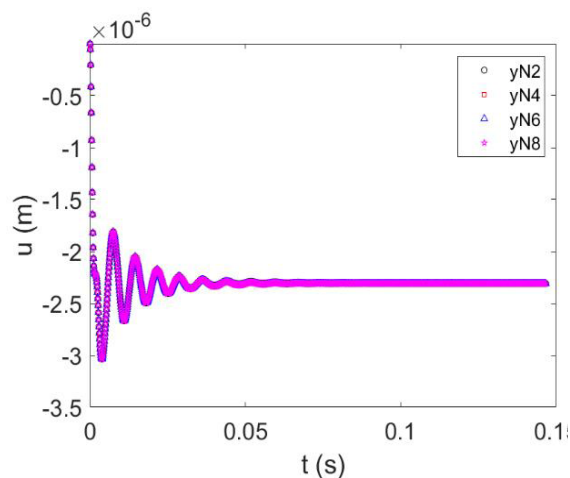


Fig. 4 – Acomodação do sistema devida ao peso da estrutura.

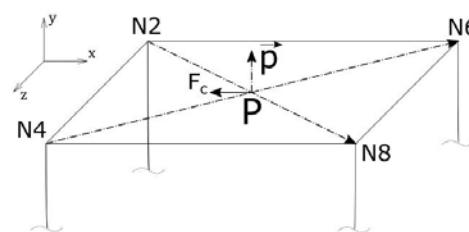


Fig. 5 – Representação do ponto P, da força e do vetor na estrutura.

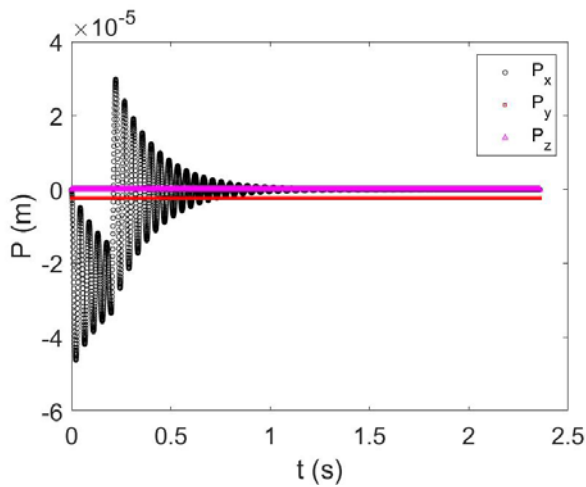


Fig. 6 – Deslocamento do ponto P durante a acomodação após a simulação do disparo.

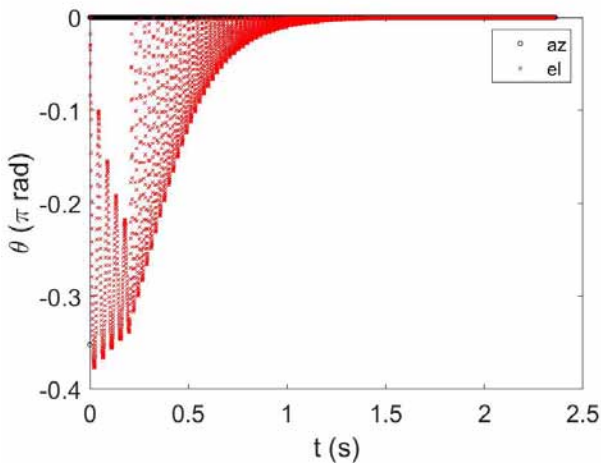


Fig. 7 – Variação de azimute (az) e elevação (el) do vetor .

5. Análise dos resultados

Com base nos resultados apresentados na seção anterior, o modelo dinâmico proposto neste artigo apresentou resultado compatível com a solução analítica para as deformações δ_{Ei} dos tubos verticais devidas ao peso da estrutura, calculadas conforme teoria apresentada em [10] pela **equação 27** e comparada na **tabela 3** com os resultados obtidos do

gráfico da **figura 4**. Além disso, o comportamento da posição do ponto P, monitorado após efetuar a simulação de disparo até a acomodação da estrutura, se mostra condizente com o esperado neste tipo de interação dinâmica.

Tab. 3 – Comparação entre o resultado obtido por simulação e o analítico para a deformação dos tubos verticais pela acomodação devido ao peso da estrutura

$u_8 = u_{20} = u_{32} = u_{44} (t \rightarrow \infty)$	$(\delta_{E1} = \delta_{E2} = \delta_{E3} = \delta_{E4})$
$-2,3103 \times 10^{-6} m$	$-2,3103 \times 10^{-6} m$

$$\delta_{Ei} = \int_0^{L_E} \frac{g\rho_E}{E_E} dx + \frac{g\rho_E L_E^2}{E_E} \quad (27)$$

6. Conclusão

Este artigo buscou apresentar, de maneira concisa e contemplando todos os passos, a aplicação do MEF na modelagem dinâmica de uma estrutura tubular espacial composta por oito EFUs. Mostrou-se, com relação à deformação sofrida pelas barras verticais devido ao peso dos componentes da estrutura, a compatibilidade dos resultados obtidos pela metodologia proposta com os resultados obtidos pela solução analítica.

Simulações e estudos adicionais poderão ser feitos para a comparação, na acomodação da estrutura após ter sofrido uma força de impulso, dos resultados obtidos pelo método apresentado com resultados experimentais ou obtidos por softwares de referência na área de simulação dinâmica de modelos espaciais.

Com isso, este trabalho busca contribuir com a disseminação e implementação do MEF aplicado à modelagem de estruturas espaciais, dada a importância e abrangência que este tipo de modelagem tem para apoiar simulações de pesquisas e projetos em diversas áreas da engenharia.

Referências Bibliográficas

- [1] RAO, S. S. Mechanical vibration. 5 ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2011.
- [2] PIRES, F. A. Otimização, análise dinâmica e de incertezas de uma treliça espacial utilizando o método dos elementos finitos. Universidade Estadual Paulista, 2016.
- [3] GUEDES, G. D. Modelagem e simulação da dinâmica do sistema viatura - metralhadora calibre .50. IME, 2010.
- [4] MICHELON, M. A. Vibrações em tubos flexíveis de armamentos ocasionadas pelo disparo. Instituto Militar de Engenharia, 2018.
- [5] REIS, C. C. do P. D., ARAÚJO Jr., F. dos S. G. de, COSTA, T. A. da. Simulação de tubo flexível de canhão e projétil durante o disparo. Instituto Militar de Engenharia, 2018.
- [6] CRAIG, R. R. Structural dynamics: an introduction to computer methods. 1 ed. Wiley, 1981.
- [7] GRUZMAN, M. Notas de aulas do curso de vibrações. Instituto Militar de Engenharia, 2020.
- [8] BATHE, K.-J. Finite Element Procedures. 2 ed. New Jersey: Englewood Cliffs, 1996.
- [9] DIEGUEZ, J. P. P. Métodos de cálculo numérico. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2005.
- [10] HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 7 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.