



## Sistemas de Amortização: Uma Abordagem para o Ensino Médio Regular

Carolina Bonisson Cardoso Pereira<sup>1</sup>, Eduardo Vicente do Couto<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Professora da Fundação Osório, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: carolbonisson@gmail.com ,

<sup>2</sup>Professor do Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: evic13@gmail.com

1

### Resumo

É proposta uma sequência didática tendo como objetivo se trabalhar Sistemas de Amortização no ensino médio regular. Esse conteúdo, normalmente trabalhado nos cursos de matemática financeira de nível superior, com uso de calculadora financeira, pode ser trabalhado como uma aplicação dos conceitos de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG), utilizando apenas uma calculadora científica. As atividades propostas foram desenvolvidas com os alunos da Escola SESC de Ensino Médio.

Na primeira atividade foi trabalhado o Sistema de Amortização Constante (SAC) e na segunda ,a Tabela Price. São citados os conteúdos de matemática financeira em alguns livros didáticos usados nas escolas de ensino médio. Finalmente são apresentadas algumas planilhas de pagamentos do SAC e Tabela Price desenvolvidas no software gratuito Geogebra. Esse artigo é derivado de um Trabalho de Conclusão de Curso do Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT pólo UNIRIO.

**Palavras-chave:** Contextualização; Inovação; Conscientização.

### Abstract

It is proposed a didactic sequence aiming to develop Amortization Systems in regular high school. This content, usually developed in higher education courses of financial mathematics using a financial calculator, can be developed as an application of the Arithmetic Progression (AP) and Geometric Progression (GP) concepts using only a scientific calculator. The proposed activities were developed with students of SESC High School.

The Constant Amortization System (CAS) was developed in the first activity and the Price Table in the second one. Financial mathematics contents are mentioned in some textbooks used in high schools. Finally, some CAS and Price Table spreadsheets developed in the free Geogebra software are presented. This article is derived from a Coursework of the Master's Program in Mathematics PROFMAT, UNIRIO pole.

**Keywords:** Contextualization; Innovation; Awareness.



---

## APRESENTAÇÃO E MOTIVAÇÃO

No Dicionário eletrônico Houaiss 2, amortizar significa “pagar gradualmente ou abater parte de dívida, empréstimo etc”. A etimologia da palavra amortizar é “a + morte + izar”, ou seja, morte é o radical da palavra. Amortizar uma dívida, portanto, significa “fazer morrer” essa dívida aos poucos. Mas o que isso tem a ver com o cotidiano de nossa sala de aula?

2

O resultado de avaliações como PISA, SAEB e ENEM indica que os alunos da educação básica no Brasil, em sua maioria, têm dificuldades e, em consequência, desinteresse pelo ensino da matemática.

O aluno não consegue associar o que ele aprende na escola com o cotidiano. É comum os professores ouvirem as seguintes perguntas de seus alunos: “Por que estou estudando essa matéria?” ou “Onde vou usar isso na minha vida?”. Os livros didáticos atuais até tentam fazer alguma contextualização, mas, em geral, elas estão totalmente fora da realidade do educando.

Não somos a favor do modismo atual de “só se ensinar o que tem aplicação prática”. Se fosse assim, ao longo da história, muitos conteúdos não seriam estudados e a humanidade não teria atingido o nível de evolução tecnológica atual. Muitos conteúdos matemáticos foram inicialmente estudados sem nenhuma aplicação prática imediata. Alguns conteúdos, inclusive, só tiveram aplicações alguns séculos depois do seu estudo inicial. Acredita-se que a contextualização deva aparecer em sala de aula quando ela realmente existir. E a matemática financeira é o maior exemplo disso. Talvez seja a parte da matemática que mais tem aplicação no cotidiano. Estuda-se alguma coisa de juros simples e compostos no ensino médio. Mas nem de longe chega-se perto do estudo dos sistemas de amortização. Quando se compra um imóvel, um carro, ou até mesmo um eletrodoméstico de forma parcelada, o cálculo das prestações é feito usando-se um dos dois principais sistemas de amortização: Tabela Price e o Sistema de Amortização Constante (SAC). Analisando-se o estudo desses sistemas, conclui-se que os pré-requisitos básicos são, além de juros simples e compostos, Progressão Aritmética (PA), Progressão Geométrica (PG) e logaritmos. Além disso, no ensino médio, pode-se trabalhar somente com uma calculadora científica, de custo bem menor que as calculadoras financeiras.



A falta de conhecimento em matemática financeira faz com que o brasileiro se torne presa fácil do sistema bancário e do comércio mal intencionado. Na ânsia de vender, facilita-se o crédito com taxas de juros abusivas e muitas vezes mentirosas. Até mesmo quem está vendendo de forma parcelada, ou oferecendo o crédito, desconhece os conteúdos matemáticos que geraram esses valores, normalmente tabelados. Usando como ferramentas conteúdos simples do ensino médio como PA, PG e logaritmos, podemos formar um aluno que, no futuro, se tornará um adulto mais crítico na hora de fazer um financiamento. É oportuno lembrar que a LDB indica para o Ensino Médio as funções de:

- 1. Possibilitar o prosseguimento de estudos, mediante consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental;*
- 2. Preparação Básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar, com flexibilidade, a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamentos posteriores;*
- 3. Aprimoramento do Educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;*
- 4. A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando teoria e prática no ensino de cada disciplina.*

O estudo dos Sistemas de Amortização atende às quatro funções propostas pela LDB:

- A primeira é óbvia, uma vez que os sistemas de amortização constituem um aprofundamento do conceito de porcentagem e juros que se aprende no ensino fundamental.

-A segunda também pode estar contemplada principalmente para aqueles alunos que desejam trabalhar na área bancária/financeira.

- A terceira já foi citada, anteriormente. Ao dominar esse conteúdo, o aluno terá autonomia intelectual e pensamento crítico para não se deixar enganar por armadilhas do comércio e do sistema financeiro.

-A quarta função também é contemplada principalmente na relação teoria e prática no ensino da matemática, além do uso de softwares como Geogebra ,por exemplo, para montagem das planilhas.



Além disso, no Parecer CNE/CP Nº 11/2009, que trata da proposta do ENSINO MÉDIO INOVADOR, o relator Francisco Aparecido Cordão menciona que o Conselho Nacional de Educação “ênfatiza que o currículo deve ter tratamento metodológico que evidencie a interdisciplinaridade e a contextualização”. Além disso,

*“O ensino deve ir além da descrição e constituir nos alunos a capacidade de analisar, explicar, prever e intervir, objetivos que são mais facilmente alcançáveis se as disciplinas, integradas em áreas de conhecimento, puderem contribuir, cada uma com sua especificidade, para o estudo comum de problemas concretos, ou para o desenvolvimento de projetos de investigação e/ou de ação.”*

Portanto, o estudo dos sistemas de amortização, atende às expectativas da proposta para o Ensino Médio Inovador, uma vez que é extremamente concreto aplicar PA e PG, dois tópicos sem muitas dificuldades para o aluno do Ensino Médio, para decidir a melhor forma de financiamento. Se a forma de financiamento já está definida, o conhecimento prévio de “como funcionam” os sistemas de amortização ajuda a verificar se as taxas anunciadas pelo comerciante ou pelo agente financeiro, estão corretas, utilizando somente uma fórmula matemática e uma calculadora científica, sem precisar fazer um curso de como utilizar a calculadora financeira. Além disso, quando o aluno já tiver todo o domínio das planilhas, fazendo todos os cálculos na calculadora científica, pode-se partir para a montagem dessas planilhas, utilizando o software Geogebra, dependendo obviamente da capacidade tecnológica da escola.

Ainda tendo como base a proposta do Parecer CNE/CP Nº 11/2009, a Professora Maria do Pilar, Secretária de Educação Básica do MEC e membro da Câmara de Educação Básica deste Conselho, citando Martha Gabriel, assim expressou o sentido dessa proposta para o Ensino Médio Inovador.

*INVENTAR é criar, engendrar, descobrir. INOVAR é tornar novo, renovar, introduzir novidade em. A INVENÇÃO tende a ser ruptura, mas a INOVAÇÃO reside no fato de ter compromisso de buscar o foco nas boas idéias existentes, e, especialmente, no fato de que não há mal algum em tomar emprestada uma idéia que já exista. A virtude da INOVAÇÃO está em enquadrar essas idéias às necessidades por meio de: adaptação, substituição, combinação, ampliação ou redução, outras utilizações, eliminação, reversão ou trazer de volta.*



E é nesse conjunto de idéias de inovação que foi proposto o projeto, ampliando o que já foi concebido sobre matemática financeira, explorando conteúdos que consideramos serem pouco trabalhados atualmente no ensino médio. O que se quer mostrar, portanto, é que matemática financeira não se resume a juros simples e compostos.

5

Serão feitas duas citações de livros de matemática utilizados em larga escala:

- *Matemática: ciência e aplicações*. Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.
- *Matemática (Volume único)*. Autor: Manuel Paiva.

A seguir apresenta-se o enfoque dado à matemática financeira nesses dois livros, destacando as abordagens sobre cada tópico, apresentando pontos altos e também algumas defasagens. É imprescindível ressaltar que a proposta não é criticar esses livros. O objetivo do trabalho é mostrar como esse tema é abordado no Ensino Médio para que se possa repensar o grau de relevância dado à matemática financeira nas escolas brasileiras. Muitos professores utilizam o livro didático como norteador do seu trabalho. Em vista disso, será questionado se esse é o caminho certo. Acredita-se que seja necessária uma inovação do tema e um replanejamento da grade curricular.

Será apresentada uma abordagem diferente do que é visto atualmente no ensino médio. Espera-se que um aluno, ao final do ensino médio, seja capaz de tomar decisões financeiras de forma crítica e acertada. Saber decidir sobre o que é mais vantajoso numa compra à vista ou a prazo, identificar taxas nominal e efetiva, saber diferenciar um sistema de amortização num financiamento de longo prazo. Tudo isso passa por uma “educação financeira” e para que possamos de fato alcançá-la propomos não só a sua inserção efetiva na grade curricular como na vida desse aluno. Espera-se também, com esse trabalho, contribuir, de alguma forma, com a melhoria do ensino de matemática financeira em nosso país.

***“Mude, mas comece devagar, porque a direção é mais importante que a velocidade...”***

*Clarice Lispector*



---

## CONTEUDO DE MATEMATICA FINANCEIRA EM ALGUNS LIVROS

### DIDATICOS

Sabe-se que o currículo, muitas vezes, é planejado tomando por base o livro didático adotado. Abaixo elencamos alguns dos principais livros utilizados no Ensino Médio nas escolas brasileiras.

6

- Matemática: ciência e aplicações, 6<sup>a</sup> edição. Autores: Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. (17 páginas)
- Matemática: volume único, 1<sup>a</sup> edição. Autor: Manuel Paiva (5 páginas)
- Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 1<sup>a</sup> edição. Autor: Jackson Ribeiro (37 páginas)
- Matemática: Contexto e aplicações, 6<sup>a</sup> edição. Autor: Luiz Roberto Dante (24 páginas)

O que nos chama atenção de forma bastante imediata, é a quantidade de páginas dedicada ao assunto, que como podemos observar na tabela é bem pequena e mesmo no livro com maior quantidade de páginas, os assuntos abordados se resumem a porcentagem, descontos e acréscimos, juros simples e compostos. Poucos são os livros que buscam vincular a matemática financeira a funções, progressões e seus comparativos gráficos.

Acreditamos ser fundamental no estudo desse tema, problemas que se adequem a situações mais próximas à realidade desse aluno, visto que sabemos que a educação não pode mais estar dissociada do contexto social. Felizmente encontramos abordagens positivas, dentro das limitações do currículo dedicado à matemática financeira. Os dois únicos livros que chegaram a abordar valor presente e valor futuro foram os livros *Matemática: ciência e aplicações* e *Matemática: Contexto e aplicações*, os demais sequer citaram o assunto. Nenhum deles explorou qualquer tipo de sistema de amortização. Acreditamos que tópicos como série uniforme de pagamentos e sistemas de amortização sejam temas bastante relevantes para uma verdadeira inserção do alunado à realidade e podem perfeitamente ser estudados no Ensino Médio.



Em geral, esses temas são abordados apenas em alguns cursos técnicos como administração e contabilidade, não fazendo parte do currículo do Ensino médio regular. No livro *Matemática: ciência e aplicações*, os autores exploram o fato de o montante nos juros simples estarem associados a uma progressão aritmética enquanto o montante nos juros compostos estão associados a progressões geométricas. Eles mostram também que, graficamente, os juros simples são representados por uma função afim enquanto os juros compostos são representados por uma exponencial. No livro “Matemática: volume único” da Editora Moderna, o autor Manuel Paiva, foi muito feliz ao trabalhar juros compostos logo após o estudo de progressões geométricas. Na realidade, os livros de volume único têm a vantagem de ter um custo menor e também na adequação da distribuição dos conteúdos pelas séries. Os livros cujos conteúdos são distribuídos em três volumes, um para cada série, de certa forma “amarram” os conteúdos que serão abordados nas três séries. Os livros de edição única permitem, por exemplo, ensinar PA ao final do estudo de função afim, ou PG ao final de função exponencial, sem a necessidade de produzir material extra uma vez que, em livros de três volumes, esses conteúdos podem estar contemplados em volumes diferentes. A desvantagem é a parte teórica muito limitada e exercícios propostos e resolvidos em número reduzido.

Salientamos que essa breve análise dos livros, não teve por objetivo criticar, mas repensar o currículo utilizado nas escolas de Ensino Médio, que não dão a merecida importância a um assunto tão rico e de tão grande importância social.

### **ATIVIDADES PROPOSTAS**

O objetivo das atividades descritas abaixo é mostrar que o conteúdo de Sistemas de Amortização, normalmente trabalhado nos cursos de Matemática Financeira de nível superior, utilizando uma calculadora financeira, pode ser trabalhado no ensino médio, como aplicação dos conceitos de PA e PG, utilizando apenas uma calculadora científica. No ensino superior, o estudo de Sistemas de Amortização é feito, de uma maneira geral, nos cursos de Administração e Economia, utilizando planilhas como Excel e calculadoras como a HP financeira sem se preocupar com os conceitos matemáticos que justificam os procedimentos. É quase um treinamento de como utilizar as tecnologias para se chegar aos resultados. O professor deve ter em mente que o objetivo desse trabalho, no ensino médio, é mostrar uma aplicação da matemática no cotidiano, sem



perder de vista o rigor de se justificar matematicamente cada passo. Sendo assim, podemos trabalhar o formalismo e a contextualização num mesmo conteúdo.

É importante também fazer uma breve revisão dos conceitos de PA e PG, caso essa matéria tenha sido ministrada num ano anterior. Além de PA e PG são pré-requisitos básicos, porcentagem, juros simples e compostos, além de logaritmos.

8

Serão apresentadas a síntese de duas atividades que foram realizadas com os alunos da Escola SESC de Ensino Médio -ESEM. Apresentaremos somente alguns exemplos devido a limitação de espaço do artigo. Nas atividades foram trabalhados vários exemplos.

A ESEM é uma escola-residência, gratuita, inaugurada em fevereiro de 2008. De acordo com o site ([www.escolasesc.com.br](http://www.escolasesc.com.br)), o projeto da escola “acompanha a diretriz institucional do SESC - entidade mantenedora da Escola através do seu Departamento Nacional - que, desde a sua fundação, em 1946, privilegia a ação educativa atendendo comerciários e trabalhadores do setor terciário e seus dependentes, e membros da sociedade em geral”. Os alunos são selecionados por Processo Seletivo Nacional e as vagas são distribuídas por estado. Não há cotas, porém, as vagas são prioritárias para dependentes de comerciários. A escola é de turno integral. No horário de 7h30min às 15h30min os alunos têm aulas do núcleo comum. O horário das 16h35min até 20h10min, os alunos têm aulas de recuperação ou oficinas da parte diversificada. As recuperações são obrigatórias. As oficinas da parte diversificada (músicas, artes, atividades esportivas, aprofundamentos de matérias do núcleo comum como, por exemplo, matemática aplicada à física, cálculo, questões de vestibulares, etc.) são escolhidas de acordo com a preferência dos alunos. Além disso, existem grupos do “compromisso acadêmico” formado por alunos com dificuldades acadêmicas. Esses alunos são indicados pelo setor de Orientação Pedagógica e têm um acompanhamento especial durante todo o ano letivo.

### **ATIVIDADE 1**

A primeira atividade foi realizada com dois grupos de alunos da Escola SESC de Ensino Médio -ESEM.



Ao final dessa atividade, o aluno deverá ser capaz de construir planilhas de pagamentos do Sistema de Amortização Constante, bem como resolver algumas questões previamente selecionadas sobre esse assunto.

Para essa atividade 1, com duração de aproximadamente 1 hora e 20 minutos, os dois grupos foram selecionados da seguinte maneira: o primeiro, formado por 10 alunos da 3<sup>o</sup> ano do “compromisso acadêmico”. O segundo, por 11 alunos voluntários. A maior parte desse segundo grupo era formada por alunos com bom rendimento acadêmico em matemática. O tema abordado para essa primeira atividade foi o Sistema de Amortização Constante (SAC).

Inicialmente algumas definições importantes foram dadas aos alunos: como Mutuante, Mutuário, Capital ou Principal, Parcelas de Amortização ( $A_K$ ), Juro, Prestação ( $P_K$ ) e Saldo Devedor.

Neste ponto salientamos a importância de se observar que a prestação referente a um período “K” pode ser representada como  $P_K = A_K + J_K$ .

A seguir, foram apresentadas as principais definições relativas especificamente ao Sistema de Amortização Constante (SAC). A opção de apresentar inicialmente tais definições, mesmo sabendo que eles não teriam condições de entender todas elas de imediato, buscou despertar a curiosidade e fazer com que, no decorrer da montagem da planilha, os alunos fossem concluindo ou verificando a validade de tais conceitos.

### **Sistema de Amortização Constante (SAC)**

Neste sistema de amortização as parcelas são iguais entre si, ou seja,  $A = C/n$ , em que n é o número de períodos.

Os juros são calculados a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada (na forma unitária) pelo saldo devedor existente no período anterior.

Por definição, como a amortização é constante e o juro incide sobre o saldo devedor, as prestações tem valores decrescentes a cada período, sob forma de progressão aritmética. Saldo devedor também decrescente, sob forma de progressão aritmética. Última cota de amortização igual ao saldo devedor após o pagamento da penúltima prestação.



No texto que foi distribuído aos alunos há o seguinte alerta:

“FIQUE CALMO! As definições acima ficarão bem claras com o exemplo a seguir”.

Os conceitos do SAC são trabalhados por meio do seguinte exemplo:

Exemplo: *Considere um empréstimo de R\$10.000,00 que deve ser devolvido pelo SAC em 5 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimo.*

Solução comentada :

Do enunciado do problema tem-se que:

$$C = 10.000; n = 5; i = 0,1$$

em que  $C$  é o capital,  $n$  é o número de prestações e  $i$  é a taxa de juros unitária.

Logo a amortização constante é calculada da seguinte maneira:

$$A = \frac{C}{n} = \frac{10.000}{5} = 2.000.$$

A partir daí, com base nas definições anteriores, é construída a seguinte planilha:

$k$	$A_k$	$J_k$	$P_k = A_k + J_k$	$S_k$
0				10.000
1	2000	10% de 10000 = 1000	2000 + 1000 = 3000	10000 - 2000 = 8000
2	2000	10% de 8000 = 800	2000 + 800 = 2800	8000 - 2000 = 6000
3	2000	10% de 6000 = 600	2000 + 600 = 2600	6000 - 2000 = 4000
4	2000	10% de 4000 = 400	2000 + 400 = 2400	4000 - 2000 = 2000
5	2000	10% de 2000 = 200	2000 + 200 = 2200	2000 - 2000 = 0

Neste ponto, em conjunto com os alunos, conclui-se que:

- As prestações 3000, 2800, 2600, 2400, 2200 e os juros 1000, 800, 600, 400, 200 formam uma PA de razão  $-200$ . Note que essa razão é igual a



$$-(A \cdot i) = -(2000 \cdot 0,1) = -200$$

- Os saldos devedores 10000, 8000, 6000, 4000, 2000 e 0 forma uma P.A de razão  $-A = -2000$ .

A partir daí, foi generalizado junto com os alunos:

$$P_1 = A + J_1 = A + C \cdot i$$

$$P_2 = A + J_2 = A + (C - A) \cdot i = (A + C \cdot i) - A \cdot i$$

$$P_3 = A + J_3 = A + (C - 2A) \cdot i = (A + C \cdot i) - 2A \cdot i$$

Sendo assim, as prestações  $P_k$  formam um PA em que o primeiro termo e a razão são respectivamente:

$$a_1 = (A + C \cdot i)$$

$$r = -(A \cdot i)$$

Para a resolução dos exercícios propostos é importante que sejam lembradas as fórmulas do termo geral e da soma dos termos de uma P.A.

É importante ressaltar que tanto os alunos de compromisso acadêmico quanto os alunos voluntários, esses últimos com bom desempenho em matemática, não tiveram dificuldades em entender o mecanismo de funcionamento do SAC. Todos, sem exceção, acharam interessante relacionar uma matéria que eles já haviam aprendido em sala de aula com uma aplicação realmente prática. Alguns alunos, dos dois grupos, disseram que essa matéria seria mais relevante que, números complexos, polinômios e Geometria Analítica, conteúdos do 3º ano do ensino médio, que só terão importância futura para os alunos das áreas tecnológicas. Os Sistemas de Amortização, ao contrário, terão importância para qualquer pessoa que um dia venha comprar algum bem financiado.

A partir daí, foi proposto o seguinte exercício semelhante ao exemplo anterior. Todos os 21 alunos dos dois grupos conseguiram resolver integralmente esse exercício. Apenas 6 alunos, todos do “compromisso acadêmico”, fizeram como o exemplo anterior, ou seja, calculando o juro sobre o saldo devedor no período e, logo após, a



prestação e o novo saldo devedor. Cabe lembrar que, no exemplo, só foi concluído que era PA no final da construção da planilha. Todos os outros 15 alunos só calcularam o juro, a prestação e o saldo devedor para os dois primeiros períodos. Como eles haviam concluído, no exemplo anterior, que esses valores formavam uma PA decrescente, eles completaram as colunas dos juros, prestação e saldo devedor utilizando a razão de suas respectivas PAs. Somente três alunos, todos do “compromisso acadêmico” solicitaram ajuda do professor, ou de algum colega, para construir a planilha. Cabe ressaltar que o aluno da ESCOLA SESC está acostumado a trabalhar em grupos e, mesmo no grupo daqueles com alguma dificuldade acadêmica, os que terminam a tarefa primeiro, naturalmente, começaram a ajudar quem ainda está com dificuldades. A tabela abaixo resume o desempenho dos alunos nessa atividade.

	Comp. Acad.	Volu.
Calcularam juro, prestação saldo devedor em todos os períodos	6	nenhum
Calcularam juro, prestação saldo devedor nos 2 primeiros períodos	4	11
Solicitaram ajuda ao professor ou colega	3	nenhum

Em seguida foram realizados mais exercícios , que podem ser encontrados no TCC.

## ATIVIDADE 2 - TABELA PRICE

Na segunda atividade realizada na escola SESC, com duração de 3 horas, os temas abordados foram *série uniforme de pagamentos* e *tabela Price*. Foram utilizados para a realização dessa atividade data-show, tela de projeção e calculadoras científicas. Todos os alunos que participaram desta atividade eram voluntários.

A atividade tem início abordando situações cotidianas como por exemplo os juros abusivos cobrados pelas operadoras de cartão de crédito . Juros esses que já bateram a taxa de 15% a.m . A exposição inicial faz com que os alunos reflitam sobre a questão dos juros sobre juros, onde esses 15% a.m geram uma taxa nominal de 180% a.a .Citando Augusto Cesar Morgado, essa taxa nominal (falsa), na realidade, gera uma



taxa efetiva de 435% a.a , pois se fizermos uma simples aplicação de taxas equivalente temos:

$$(1 + i) = (1 + 0,15)^{12}, \text{ ou seja,}$$

$$i = 4,35 = 435\% \text{ a.a.}$$

13

Alguns alunos mostraram espanto com esse valor, pois já consideravam a taxa de 180% a.a absurda. Infelizmente muitos brasileiros chegam a acreditar nessa taxa de 180% a.a e pouquíssimos têm consciência de que na realidade tem que pagar juros de 435% a.a, acumulando dívidas cada vez maiores, gerando o famoso efeito “bola de neve”, ou como foi citado na atividade, “o cliente vira Sócio atleta do SPC e Serasa”.

É importante ressaltar que essa atividade possui uma série de pré-requisitos pois nessa etapa o aluno, além de possuir os conceitos iniciais de matemática financeira tais como juros simples e compostos, deve saber o valor do dinheiro no tempo (diagrama de setas). Progressões aritméticas e geométricas também são assuntos que devem estar bem assimilados pelos alunos. Lembramos que essa aula foi ministrada para alunos do 3º ano do Ensino Médio em fase de conclusão de curso.

O primeiro exemplo trabalhado tem caráter introdutório e o seu objetivo é fazer o aluno relembrar o valor do dinheiro deslocado no tempo. Esse exemplo foi resolvido utilizando o diagrama de setas ou eixo de setas.

Em seguida foi feita a generalização para a situação:

Considere que uma dívida a ser paga com  $n$  prestações iguais a  $P$  , segundo a taxa  $i$  na unidade de tempo considerada. Defina  $V$  como seu valor atual. Logo:

$$V = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$V = P \cdot \frac{\frac{1}{1+i} \left[ 1 - \left( \frac{1}{1+i} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{1+i}} = P \cdot \frac{\frac{1}{1+i} [1 - (1+i)^{-n}]}{\frac{1+i-1}{1+i}} = P \cdot \frac{\frac{1}{1+i} [1 - (1+i)^{-n}]}{\frac{i}{1+i}}$$

$$V = P \cdot \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$



Foi introduzido o termo  $a_{n,i} = a_{n-i}$  também conhecido como fator de valor atual em que  $n$  é a quantidade de prestações e  $i$  é a taxa de juros aplicada.

Nesse momento o professor expôs a tabela de fator de valor atual e mostrou como utilizá-la .

Assim  $V$  ( valor à vista ) pode ser calculado da seguinte forma:

$$V = P. a_{n-i}$$

Isto é, o valor à vista é o valor da prestação multiplicado por esse fator  $a_{n-i}$ .

Vale ressaltar que isso não resulta uma fórmula diferente já que  $a_{n-i}$  nada mais é do que o valor da soma dos termos de uma PG finita .

Apesar de acreditarmos que o mais importante é saber o processo que leva a determinadas fórmulas e tabelas, sabemos que as mesmas se bem utilizadas poupam tempo, e muitas vezes serão o único auxílio em provas de concursos.

O segundo exemplo trabalhado, mostrou uma aplicação da “fórmula” deduzida acima.

O terceiro e último exemplo apresentado foi o seguinte:

Exemplo 3: *Uma nutricionista depositou R\$1.500,00 semestralmente para formar um pecúlio durante 10 anos. Calcule o montante à taxa de juros compostos de 30% ao semestre.*

Solução comentada:

Como  $i= 30\%$  ao semestre,  $n= 10$  anos = 20 semestres.

Como o capital inicial é o valor atual do dinheiro temos

$$V = P.a_{20,3}.$$

Assim

$$V = 1500. \left( \frac{1 - (1,3)^{-20}}{0,3} \right)$$

$$V = 4973,69$$



Deseja -se encontrar o montante a uma taxa de juros compostos de 30% ao semestre por um período de 20 semestres temos:

$$M = 4973,69.(1,3)^{20}$$

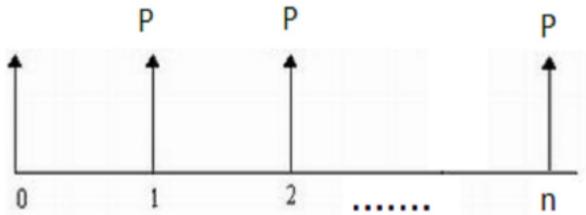
$$M = 945.248,19$$

15

Esse exemplo foi explorado da seguinte forma:

Foi utilizada uma generalização onde P é a prestação, n é a quantidade destas prestações e i é a taxa unitária.

Assim trazendo todas as prestações para a data atual temos:



$$V = P \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad (3.1)$$

$$M = V.(1 + i)^n \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) em (3.2) temos

$$M = P \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}, \text{ isto é,}$$

$$M = P.S_{n,i},$$

em que  $S_{n,i}$  é chamado fator de acumulação de capital ou valor futuro.

Esse problema serviu para fazer um “link” com uma situação bastante comum para jovens investidores que aplicam parte dos seus rendimentos no mercado financeiro. Note que nesse exemplo hipotético, ao investir um valor de R\$ 1500 mensais ao final de 10 anos o rendimento chegou próximo a 1 milhão de reais. Poder-se-ia questionar que



esses juros estão um pouco altos. Vale lembrar que esse é um exemplo hipotético e que os juros de mercado são bastante variáveis.

Nesse exemplo foi explorado também o uso que se faz da calculadora científica. Os alunos, em geral, sabem usar tecnologias muito avançadas. Essa geração é composta por “nativos digitais”. Seus celulares conectam a internet, usam ipods, ipads entre outros com uma facilidade incrível. Porém, ao fazer uso da calculadora científica, muitas vezes não sabem explorar suas funcionalidades.

Lembre-se que na atividade 1 foi utilizada a tabela SAC. Nesta segunda atividade faremos uso da tabela Price.

Neste ponto, a fim de motivar o assunto, devem ser introduzidas algumas utilizações da tabela Price, como por exemplo o financiamento de imóveis e principalmente o financiamento de automóveis.

Destaca-se abaixo uma série de características da Tabela Price, tais como:

- Prestações fixas
- Amortizações crescentes (prestações fixas e juros decrescentes)
- A taxa de juros contratada é dada em termos nominais.
- As prestações tem período menor que aquele a que se refere a taxa. (No cálculo é utilizada a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação).
- Última cota de amortização igual ao saldo devedor após o pagamento da penúltima prestação.
- Saldo devedor imediatamente após o pagamento da prestação  $P_K$  é igual ao valor atual da série postecipada formada pelas prestações  $P_{K+1}$  até  $P_n$ .
- Como as prestações  $P_K = R$  constantes constituem uma série uniforme de pagamentos, o capital emprestado é o valor atual dessa série.
- Cada prestação  $R$  é dada por :

$$R = C \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$



Após listar tais características talvez valha a pena ressaltar que os alunos não devem se desesperar com tanta informação e que após por o Sistema Price em prática, muitas dúvidas serão elucidadas. Inicia-se então com o seguinte exemplo.

Exemplo: Considere um empréstimo de \$10.000,00 que deve ser devolvido pelo Sistema Francês (Tabela Price) em 5 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimo.

17

$k$ (Período)	$P_k$ (Prestação)	$J_k$ (Juros)
0	–	–
1	2.637,97	10% de 10.000,00 = 1.000,00
2	2.637,97	10% de 8.362,03 = 836,20
3	2.637,97	10% de 6.560,26 = 656,03
4	2.637,97	10% de 4.578,32 = 457,83
5	2.637,97	10% de 2.398,18 = 239,82

$k$ (Período)	$A_k = P_k - J_k$ (Amortização)	$k$ (Período)	$S_k$ (Saldo devedor)
0	–	0	10.000,00
1	2.637,97 – 1.000,00 = 1.637,97	1	10.000,00 – 1.637,97 = 8.362,03
2	2.637,97 – 836,20 = 1.801,76	2	8.362,03 – 1.801,76 = 6.560,26
3	2.637,97 – 656,03 = 1.981,94	3	6.560,26 – 1.981,94 = 4.578,32
4	2.637,97 – 457,83 = 2.180,14	4	4.578,32 – 2.180,14 = 2.398,18
5	2.637,97 – 239,82 = 2.398,15	5	2.398,18 – 2.398,15 $\cong$ 0

É importante lembrar que o valor da prestação fixa é calculado através das fórmulas

$$V = P \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$P = C \cdot \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$P = 10000 \cdot \frac{0,1}{1 - (1 + 0,1)^{-5}}$$

$$P = 2.637,97,$$



pois trata-se de uma série uniforme de pagamentos com prestações fixas postecipadas.

Vale a pena destacar que se o mutuário quiser quitar a dívida na data 3, por exemplo, deve-se “trazer” as prestações  $P_4$  e  $P_5$  para essa data.

Assim teríamos

$$\frac{2.637,97}{1,1} + \frac{2.637,97}{(1,1)^2} = 4578,29$$

Note que esse valor é aproximadamente o mesmo que o saldo devedor na data 3.

Ressaltamos a importância de explorar a tabela de várias formas e não como um processo meramente mecânico.

Após construir a tabela o professor retornou as características da Tabela Price e os alunos demonstraram, nesse momento, ter compreendido com mais clareza.

Em seguida sugerimos outro problema aos alunos onde eles teriam que montar outra Tabela Price .

## MATEMÁTICA FINANCEIRA E TECNOLOGIAS

Em meio a evolução tecnológica que vem ocorrendo nas duas últimas décadas, nós professores não podemos nos excluir desse processo de modernização .

Acreditamos na importância que o bom uso das tecnologias, de forma consciente e bem planejada, possa render bons frutos no processo de aprendizagem.

Vemos o uso das tecnologias como um “algo a mais” no ensino, um facilitador para a consolidação dos conteúdos , uma ferramenta que acrescente, de forma significativa, o conteúdo estudado.

Muitos são os distratores da era digital, assim torna-se inevitável não lançarmos mão de recursos tecnológicos dentro de nossas salas de aula. Criar situações que levem nossos alunos a refletir suas realidades e, por que não, usando algumas tecnologias que nossos alunos dominam ou dominarão com muito mais destreza que nós professores.



Sabemos que muitos professores não tiveram, em sua formação, inclusão digital nos softwares e programas matemáticos. Nós mesmos nos consideramos aprendizes no que diz respeito ao uso desses softwares. Entretanto, ressaltamos a necessidade da busca do corpo docente por essa atualização. É difícil, como em toda transição, sair da “zona de conforto”. Todavia os resultados obtidos podem ser muito gratificantes.

Muitas atividades de matemática financeira utilizando calculadoras científicas, planilhas do excel, software Calc, entre outros recursos computacionais, já são desenvolvidas e podem ser facilmente encontradas na internet.

Pensamos, então, em trabalhar com um software diferente do que usualmente encontramos no desenvolvimento da matemática financeira e optamos pelo GeoGebra (Geometria + Álgebra). E a partir dele desenvolvemos atividades relativas a SAC e Price a partir das funcionalidades do Geogebra.

*O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino, reunindo recursos de geometria, álgebra, tabelas, planilhas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Com isso tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Ele é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. Além disso possui o Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro, que é um dos membros do IGI (InternationalGeoGebraInstitutes). Esse instituto fica localizado na UFF-RJ e tem por objetivo desenvolver materiais gratuitos no treinamento do GeoGebra como ferramenta para o ensino, a aprendizagem e a divulgação da matemática a todos os públicos, oferecer oficinas para professores, certificando-os no uso deste material no Brasil (e, particularmente, no Estado do Rio de Janeiro) e fazer formação presencial e a distância de professores e alunos de licenciaturas em matemática.*

Retomamos às atividades aplicadas na escola SESC. Pensamos em algum exercício, dentre aqueles já descritos nas atividades, que pudesse tirar melhor proveito dos recursos computacionais. Assim temos por objetivo explorar essencialmente duas atividades: alguma que aborde o Sistema de Amortização Constante (SAC) e outra que aborde o Sistema Francês (Tabela Price). É importante enfatizarmos que o momento



ideal para a aplicação do GeoGebra é posterior às atividades realizadas, nas quais o aluno já construiu manualmente as tabelas, baseando - se nas características de cada um dos sistemas de amortização.

Retornemos a um exercício que já havíamos realizado na atividade 1:

*Considere um empréstimo de \$8.000,00 que deve ser devolvido pelo SAC em 10 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 5% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimo.*

20

O aluno já havia realizado a atividade usando a calculadora científica.

Ele sabe que, por se tratar do sistema SAC, as parcelas de amortização são iguais entre si, ou seja,  $A = \frac{C}{n}$ , onde  $n$  é o número de períodos, logo  $A = \frac{8000}{10} = 800$ .

Sabe também que os juros são calculados a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada (na forma unitária) pelo saldo devedor existente no período anterior.

E como a amortização é constante e o juro incide sobre o saldo devedor, as prestações  $P_K = A_K + J_K$  tem valores decrescentes a cada período, sob forma de progressão aritmética.

Assim ao inserirmos em nossa tabela os dados do problema:

$$n = 10 \quad \text{Capital} = 8000 \quad \text{taxa} = 0.05$$

A tabela é toda calculada tomando por base os dados digitados . Para o aluno que acabou de fazê-la manualmente é um recurso de conferência.

O GeoGebra, porém, evidencia o gráfico em barras apresentando na cor azul os valores da amortização em cada período (que já sabemos ser constante) e em rosa os valores das prestações em cada período.

O gráfico é muito útil, pois ressalta as principais características do SAC.

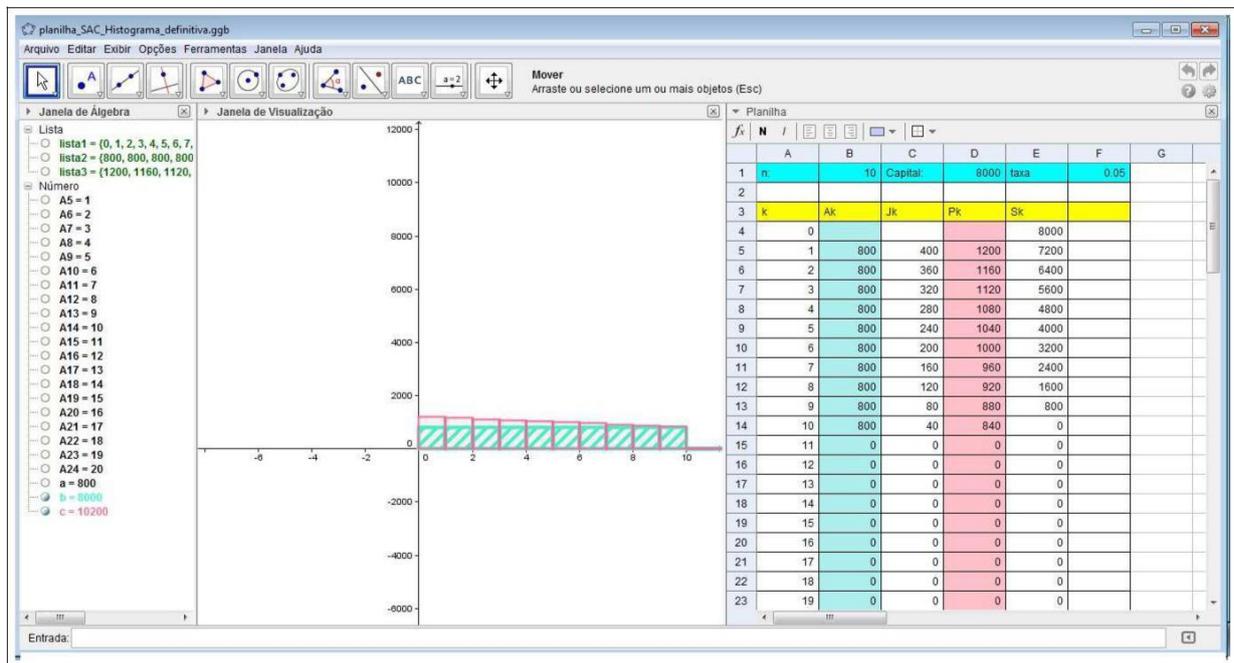


Figura 1: Gráfico ilustrando as principais características do SAC

Vamos destacar algumas delas:

- O aluno tem uma visão gráfica bastante clara de que a amortização é constante, pois a barra azul, em todos os períodos, não sofre nenhuma variação.
- As prestações são cada vez menores. O gráfico, juntamente com a tabela, torna mais clara a visualização das prestações em PA decrescente, que no exercício apresentado, possui razão  $-40$ .
- O aluno pode notar também que a diferença entre as áreas dos retângulos rosa e azul, respectivamente, é o valor que o consumidor está pagando de juros, uma vez que  $P_k = A_k + J_k$ .
- O gráfico ressalta dessa forma os juros menores a cada mês.

Vimos que o aplicativo nesta atividade apresentou uma outra visão do conteúdo estudado, utilizando não só os dados numéricos mas também a visualização das variáveis através do histograma, enriquecendo e tornando a atividade mais interessante.

Vamos agora rever o exercício 1 da atividade 2 que aborda Tabela Price.

*Considere um empréstimo de \$8.000,00 que deve ser devolvido pelo Tabela Price em 10 prestações mensais, sendo a primeira em 30 dias, à taxa de juros compostos de 5% ao mês. Construa a planilha de pagamentos desse empréstimo.*



Observe que estamos utilizando os mesmos valores do capital, da prestação e taxa de juros, que no exercício na atividade 1, porém agora utilizando a Tabela Price.

Usar os mesmos valores, aplicando dois sistemas de amortização, é uma boa forma para que o aluno possa analisar comparativamente e decidir qual o melhor sistema de amortização.

22

Observe o gráfico:

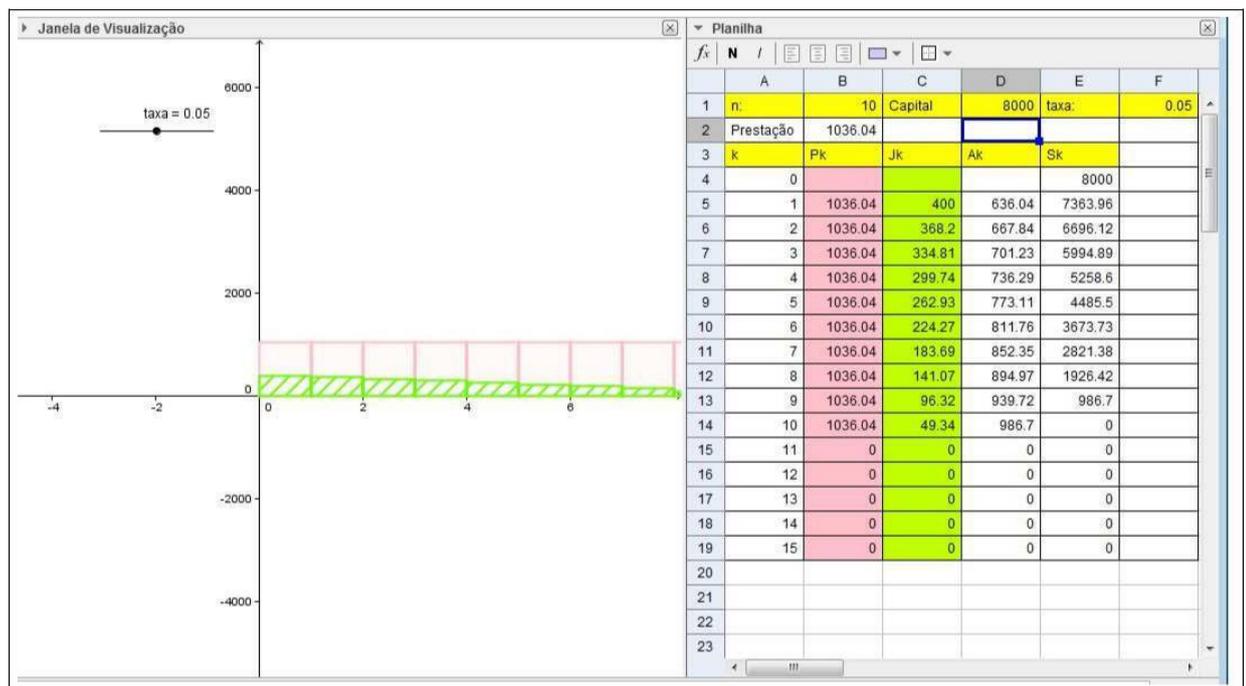


Figura 2: Gráfico ilustrando as principais características da Tabela Price.

O gráfico ressalta as principais características da Tabela Price:

- As prestações são fixas.
- Como estas prestações são fixas e os juros (em verde) são decrescentes podemos constatar que as amortizações são crescentes.

Utilizamos a ferramenta “controle deslizante”, onde fazemos a taxa variar (na atividade fizemos a taxa variar de 0 % à 10 % , de 1% em 1%). Esse recurso oferecido pelo GeoGebra apresenta, para o aluno, um interessante comparativo dos valores em relação à variação das taxas. Além disso conseguimos utilizar o recurso de animação,



permitindo assim que o aluno visualize-se o passo a passo desse processo. Abaixo são apresentadas algumas imagens correspondendo às taxas 0,01; 0,05 e 0,1.

23

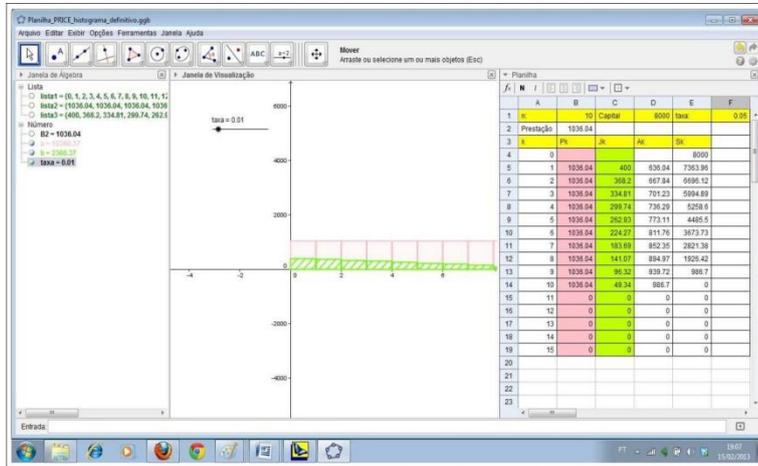


Figura 3: Gráfico correspondendo à taxa 0, 01.

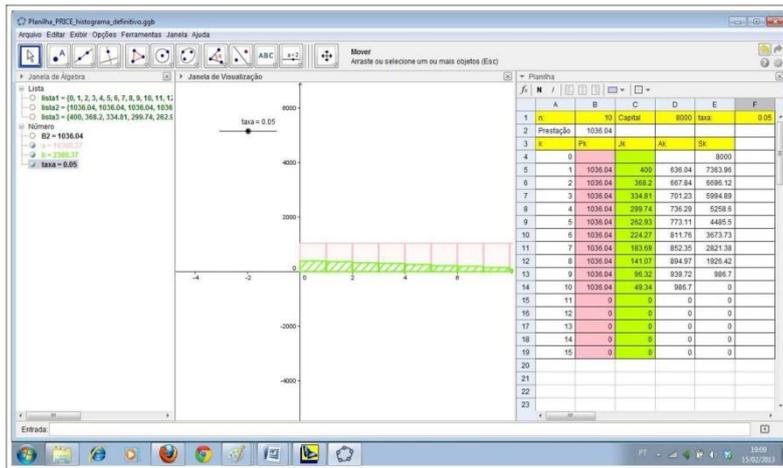


Figura 4: Gráfico correspondendo à taxa 0, 05.

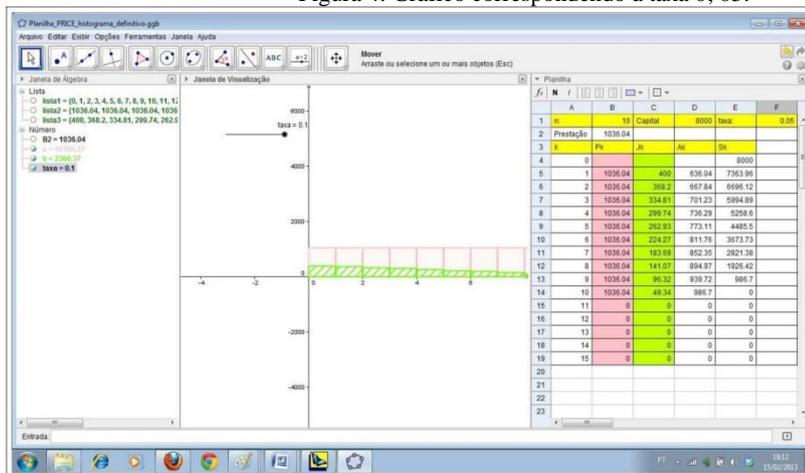


Figura 5: Gráfico correspondendo à taxa 0, 1.



Vamos explorar agora o comparativo dos gráficos e tabelas utilizando o GeoGebra:

24

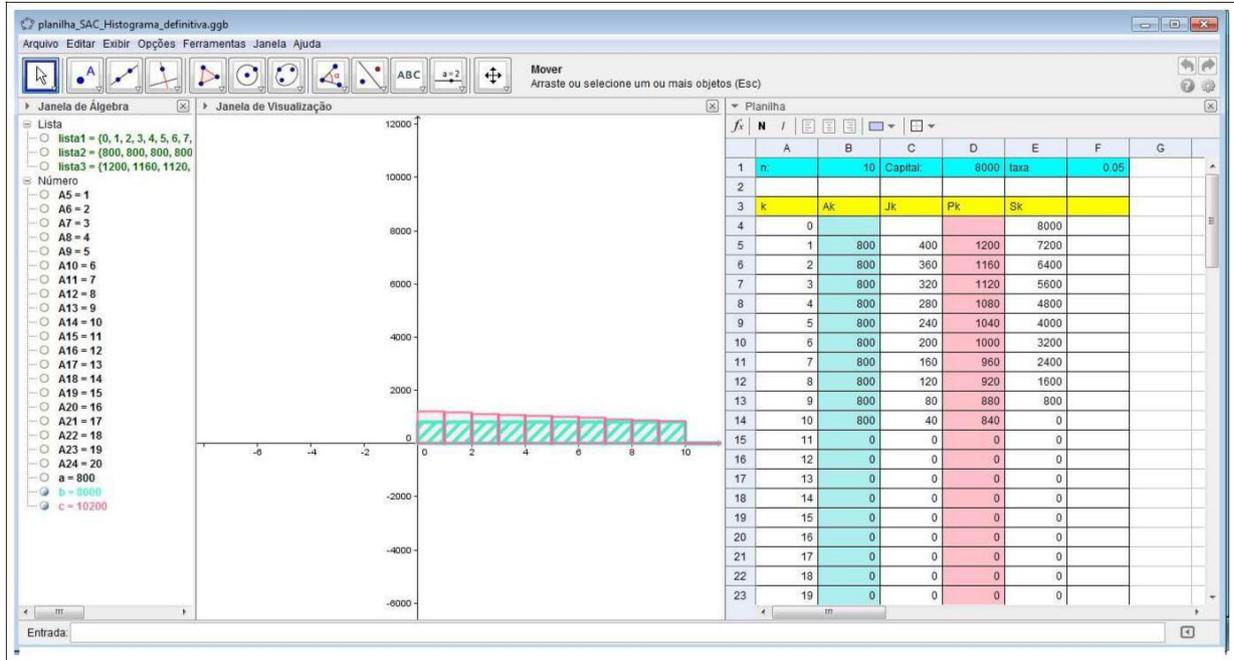


Figura 6: Gráfico SAC.

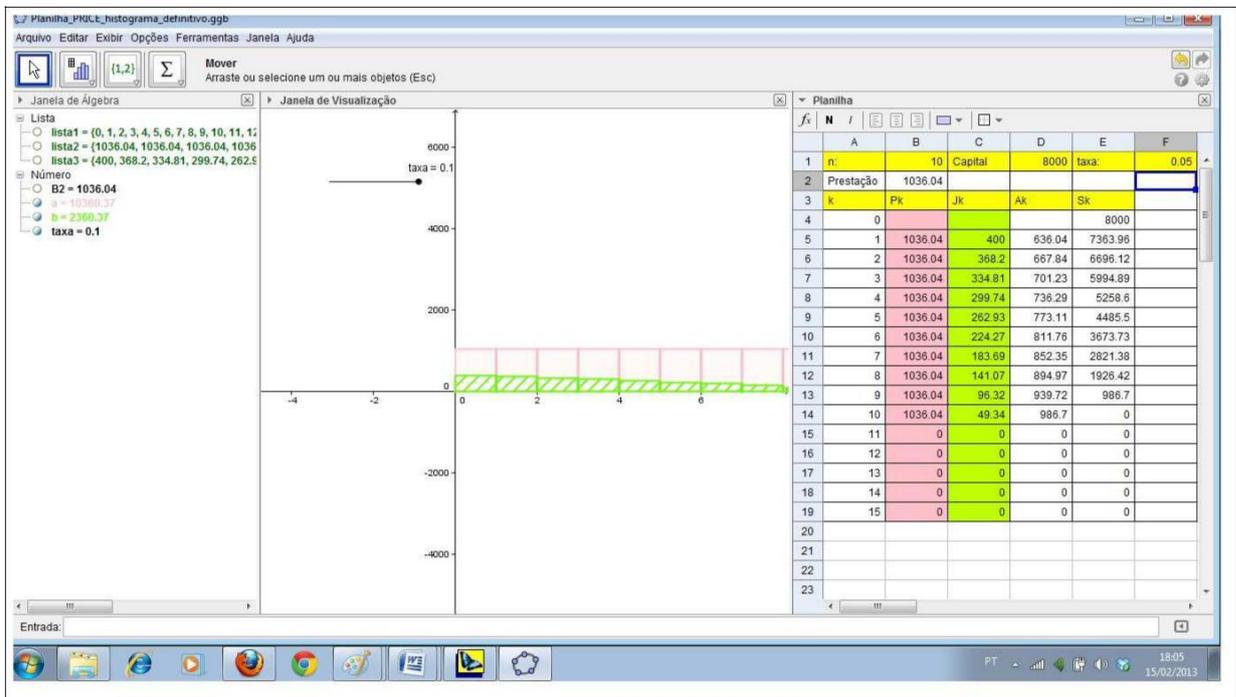


Figura 7: Gráfico Tabela Price.

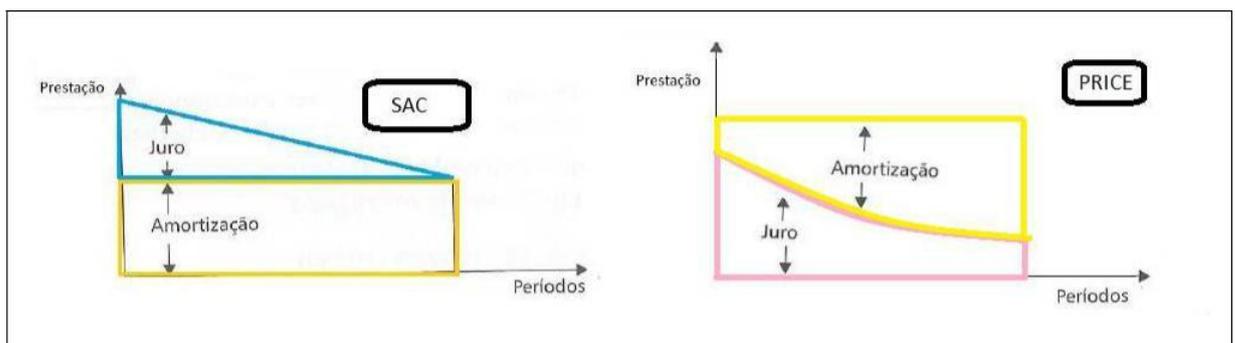


### Comparativo

25

	SAC	PRICE
Prestação	Valores decrescentes em PA	Constante
Amortização	Constante	Crescente
Juros	Valores decrescentes em PA	Valores decrescentes

Figura 8: Gráfico comparativo SAC x Tabela Price.



Observe a coluna  $P_K$  em ambos os sistemas de amortização. Note que o somatório das prestações do sistema SAC é a soma dos termos de uma PA onde o primeiro termo é 1.200 e o décimo e último termo é 840 . Assim



$$S_{10} = \frac{(1200 + 840) \cdot 10}{2} = 10.200.$$

Já no Sistema Price como as dez prestações são iguais a 1036,04 cada, o total pago pelo consumidor no mesmo período de tempo é R\$ 10360, 40.

26

Esperamos que com essas duas atividades utilizando o software GeoGebra, tenhamos explorado as principais características e diferenças desses dois sistemas de amortização, exibindo suas peculiaridades e consolidando conceitos já trabalhados com os alunos por outros processos mais simples, incentivando o uso da tecnologia em sala de aula e tornando-a cada vez mais acessível, lembrando que o GeoGebra é um software gratuito.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mostramos, com as atividades realizadas, que é possível trabalharmos os conteúdos e Sistemas de Amortização, PRICE e SAC, no Ensino Médio. Os pré-requisitos necessários são juros simples, juros compostos e progressões. Dominando os conteúdos de progressões geométricas o aluno é capaz de entender como funciona uma série uniforme de pagamentos e, a partir daí, calcular o valor da prestação de um financiamento na Tabela Price. E com os conteúdos de progressões aritméticas o aluno consegue montar, com facilidade, uma planilha de pagamentos no SAC. A aplicação do Geogebra tem por objetivo a consolidação dos conceitos estudados pois, com esse recurso o aluno consegue visualizar, de forma bastante clara e objetiva, as características de cada um dos sistemas de amortização podendo assim fazer um paralelo entre os dois sistemas e até mesmo, dependendo da situação e condições apresentadas, ser capaz de optar pelo melhor. A inclusão do estudo de sistemas de amortização, no ensino médio, contribuirá para a formação de um cidadão mais consciente e atuante, capaz de tomar decisões financeiras de forma crítica e acertada. Dessa forma fica evidenciado o papel social da matemática na formação do educando.



## REFERÊNCIAS

- [1] Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações, São Paulo, Atica, 2010.
- [2] Iezzi, Gelson; Dolce, Oswaldo; Degenszajn, David; Périgo, Roberto; Almeida, Nilze de. Matemática: ciência e aplicações, volume 1, 6ª edição, editora Saraiva, 2010.
- [3] Iezzi, Gelson; Hazzan, Samuel; Degenezajn, D. Mauro. Fundamentos da Matemática Elementar, 11: matemática comercial e financeira. – 1ªed.- São Paulo, Atual 2004.
- [4] Mathias, Washinton Franco; Gomes, José Maria. Matemática financeira, 6ª edição, 4ª reimpressão, São Paulo, Atlas 2011.
- [5] Morgado, Augusto C.; Wagner, Eduardo; Zani, Sheila C. Progressões e Matemática Financeira, SBM, Rio de Janeiro, 1993.
- [6] Paiva, Manoel. Coleção base: matemática volume unico/Manoel Paiva - 1ªedição, São Paulo, Moderna 1999.
- [7] Ribeiro, Jackson. Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, volume 2, 1ªedição, São Paulo, Scipione, 2010.