FUNDAÇÃO OSORIO RJ
Revista Científica

Geometria Hiperbólica: Explorando o Disco de Poincaré no Ensino Médio

Lamartine Pragana Galvão

Professor da Fundação Osório, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: tininhopragana@gmail.com

Resumo

Este trabalho trata da introdução ao conhecimento sobre geometria hiperbólica, uma das geometrias conhecidas como não-euclidianas. Para isso é apresentado um breve relato histórico envolvendo os matemáticos que contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento desta geometria, além do estudo de alguns de seus resultados e modelos de representação.
É bastante interessante compreender o que seja o método axiomático, a partir da comparação dos conceitos e propriedades da geometria hiperbólica com os da já conhecida geometria euclidiana. As Geometrias Euclidiana e Hiperbólica diferem basicamente pelo quinto postulado de Euclides e uma curiosidade sobre suas concepções é que a euclidiana foi observada a partir de situações concretas e depois transformada em teoria matemática organizada, já a geometria hiperbólica foi obtida em forma de teoria lógica, coerente e consistente para depois ganhar uma interpretação visual.
Este estudo pretende mostrar que é possível estabelecer conexões entre estas duas geometrias a ponto de explorar, ainda que superficialmente, o assunto numa turma de ensino básico, usando como apoio o modelo conhecido como “Disco de Poincaré”, que aproxima bem as duas geometrias.
Palavras chave: *Geometria Não Euclidiana*, *Geometria Hiperbólica,Disco de Poincaré*.

Abstract

This work is about the introductory learning of hyperbolic geometry, one of the non-Euclidean geometries. It includes a brief historical narrative about the mathematicians, who collaborated in some way for the development of this geometry, and the studies of some of their results and representation models.
It is very interesting to understand the axiomatic method by comparing hyperbolic geometry concepts and properties with the ones of the Euclidean geometry. The difference between Euclidean and hyperbolic geometries is basically the Euclid's fifth postulate; and a curious fact about their conceptions is that the Euclidean geometry was observed from concrete situations, and then transformed into an organized mathematic theory, while the hyperbolic geometry was based on a logical, coherent and consistent theory to afterwards gain a visual interpretation.
This study intends to demonstrate that is possible to associate those two geometries, in order to explore this matter, though superficially, in middle school and high school classes, using a model called “Poincaré disc”, which approximates those two geometries.
Keywords: Non-Euclidean geometry, hyperbolic geometry, Poincaré disc.

INTRODUÇÃO

O termo "geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo*=terra, *metrein*=medição). A provável origem da Geometria está na agrimensura, segundo o historiador grego Heródoto (séc.V a.C.), mas não há dúvidas de que civilizações antigas, da Babilônia à China e também as civilizações Hindu, tinham conhecimentos de natureza geométrica.

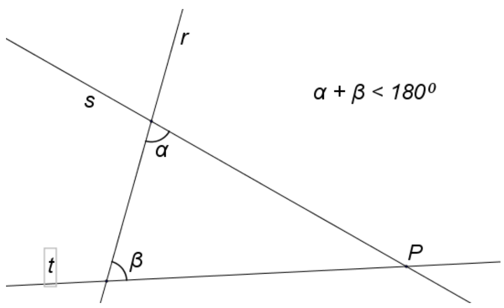
Platão interessou-se por matemática, e especialmente pela geometria, e não se satisfazendo com verificações experimentais, evidenciou, durante o ensino, a importância de demonstrações rigorosas dedutivas. O principal responsável por esta estruturação foi o discípulo da escola platônica *Euclides* (325-285a.c), mestre na escola de Alexandria (Cidade do Egito, famosa por seu farol). *Euclides de Alexandria* publicou em torno de 325 a.C. uma obra chamada *Os Elementos*, composta por uma coleção de treze volumes. Nessa obra, Euclides apresentou o estudo da Geometria num modelo diferente a partir de princípios e definições, procedendoo seu desenvolvimento de forma dedutiva, num modelo hoje conhecido como modelo axiomático.

O modelo de Euclides baseava-se em cinco postulados, os quatro primeiros foram acolhidos pelos matemáticos ao longo do tempo:

1.Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une.
2.Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.
3.Dados um ponto qualquer e uma distância arbitrária pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada.
4.Todos os ângulos retos são congruentes.

Entretanto o quinto postulado gerou controvérsias.

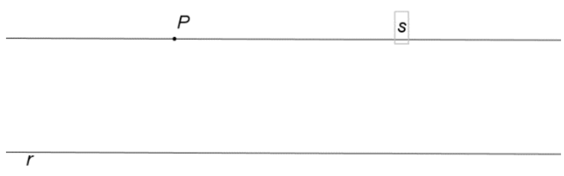
"Se uma linha reta (r) cortar duas outras retas (s e t), de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas (s e t), quando suficientemente prolongadas, encontram-se (no ponto P) do mesmo lado em que estão esses dois ângulos."



Retas *s* e *t* não paralelas

Ou da forma como é enunciado no ensino básico:

*"Dada uma reta **r** e considerando um ponto **P** não pertencente à ela, existe uma única reta **s** contendo o ponto **P** e paralela à reta **r** dada."*



Reta *s* paralela a *r* passando por *P*

Alguns matemáticos tentaram provar, usando o método da contradição, que o quinto postulado era, na verdade, uma consequência dos outros quatro; não conseguiam, mas acabaram por desenvolver outras geometrias, conhecidas como geometrias não euclidianas. Este trabalho aborda uma delas especificamente, a Geometria Hiperbólica cujos principais estudos foram desenvolvidos pelo matemático russo Nikolai Ivanovich *Lobachevsky* (1792, 1856) e pelo romeno János *Bolyai* (1802, 1860), mas outros matemáticos de renome como o alemão Johann Friedrich *Gauss* (1777, 1855), por exemplo, desenvolveram algum estudo sobre ela; nela, o quinto postulado tem a seguinte forma:

"Dada uma reta **r** *e considerando um ponto* **P** *não pertencente a ela, existe mais de uma reta contendo o ponto* **P** *e paralela à reta* **r** *dada."*

Especialmente pela dificuldade de representação desta geometria, já que as superfícies nas quais ela acontece não só não são planas como são um tanto complexas. Era interessante desenvolver modelos que pudessem aproximá-la da geometria euclidiana, já bastante familiar. Um modelo que atende a esta concepção é o do Disco de Poincaré, o qual usaremos nas atividades propostas mais adiante.

OBJETIVO

Este artigo é baseado em meu Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática, feito na UNIRIO.

Seu objetivo é mostrar que é possível um aluno de ensino básico realizar atividades relacionadas à geometria hiperbólica usando alguns dos conhecimentos já adquiridos em matemática na escola; desde que algumas propriedades do assunto novo lhe sejam mostradas.

As demonstrações foram deixadas de fora, pois não é objetivo aqui atingir um caráter excessivamente técnico.

É necessário, todavia, apresentar algumas definições importantes da Geometria Hiperbólica, bem como o que vem a ser o disco de Poincaré, para uma boa compreensão de como fazer a associação entre esta e a geometria euclidiana.

Isso exigirá do leitor conhecimentos básicos de geometria euclidiana: circunferência, tangência e triângulos retângulos, pois a atividade que será sugerida envolve construções geométricas, utilizando instrumentos de desenho geométrico ou um bom software de geometria.

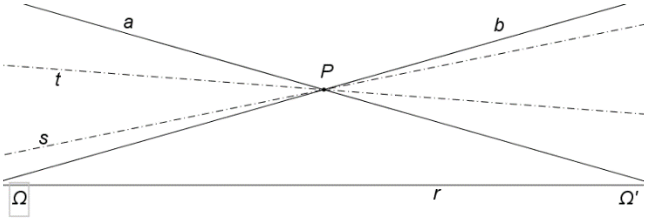
FUNDAÇÃO OSORIO RJ
Revista Científica

Um Pouco da Matemática da Geometria Hiperbólica

A seguir estão algumas das principais definições e resultados matemáticos que envolvem a Geometria Hiperbólica, objetivamente os tipos de pontos e de triângulos.

*Definição 1: O ponto obtido pela interseção de duas "retas" é chamado de **Ponto Próprio**.*

*Definição 2: Assim como na geometria euclidiana, duas "retas" paralelas não têm nenhum ponto em comum, entretanto, nesta geometria, diz-se que elas encontram-se em dois pontos diferentes, chamaremos estes de **Pontos Ideais**, e os representaremos por Ω e Ω'.*



Pontos ideais Ω e Ω'

Na figura acima, está uma representação simplória de duas situações existentes na geometria hiperbólica.

- O ponto *P* é um ponto próprio;
- Paralelas: as "retas" *a* e *b* são paralelas à reta *r*, encontrando-se com *r* **e**m Ω e Ω*'*, respectivamente;
- Não secantes: as "retas" *s* e *t* são não secantes, todas as retas entre *a* e *b*, na mesma região que *s* ***e*** *t* são não secantes.

Obs: Um ponto de encontro entre uma reta e suas não-secantes é denominado *Ponto Ultra-Ideal* ou *Ponto-Gama*.

Definição 4: Aqueles triângulos cujos três vértices são pontos próprios são ditos Triângulos Ordinários.

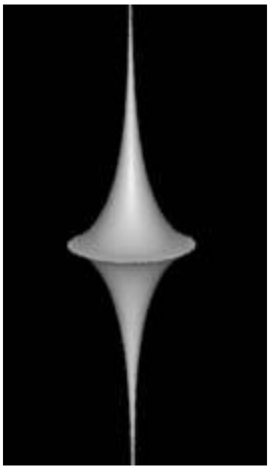
Definição 5: Os triângulos nos quais pelo menos um dos vértices é um ponto ideal são os Triângulos Ω ou Triângulos Hiperbólicos.

Isso tudo é tão diferente de tudo o que aprendemos sobre geometria na escola e distante da nossa intuição, que cabem perfeitamente as perguntas:

- Essa geometria "funciona"?
- Onde?

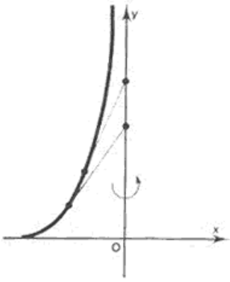
A *Pseudoesfera,* uma superfície com curvatura negativa ou, em outras palavras, côncava – é considerada a superfície espacial mais conveniente para a representação da Geometria Hiperbólica, embora existam outras.

Superfície simétrica ("corneta dupla") em relação a um plano, obtida pela rotação em torno de um eixo de uma curva chamada *tractriz*.

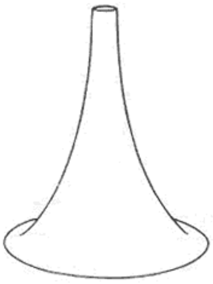


Pseudoesfera completa
Fonte: www.seara.ufc.br

Frequentemente as representações feitas na pseudoesfera, mostram apenas uma de suas metades.

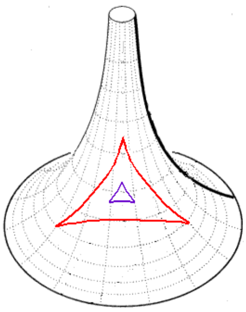


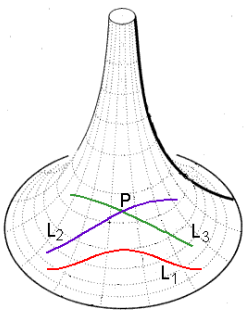
Tractriz



Pseudoesfera

Duas situações bem simples, retas paralelas e triângulos estão representadas nas figuras abaixo:





Retas L_2 e L_3 paralelas a L_1 que passam pelo ponto ***P***

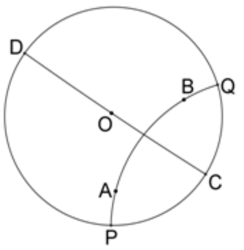
Triângulos na pseudoesfera

FUNDAÇÃO OSORIO RJ
Revista Científica

O Disco de Poincaré

O modelo desenvolvido pelo francês Jules Henri *Poincaré* (1854, 1912), entre 1882 e 1887, consiste em considerar um círculo desconsiderando sua circunferência, assim como, na teoria dos conjuntos, um intervalo numérico aberto. As “retas” neste modelo são arcos de circunferência perpendiculares à circunferência do disco e, a partir daí, é possível representar situações referentes à geometria hiperbólica dentro deste disco.

No modelo de Poincaré o plano hiperbólico é representado por um círculo, desconsiderando-se a sua fronteira, chamado de "disco de Poincaré", aqui as “retas” são representadas por diâmetros, como o $\overline{CD}$ do disco abaixo, ou por arcos de circunferência perpendiculares ao disco, como o arco PQ da figura a seguir.

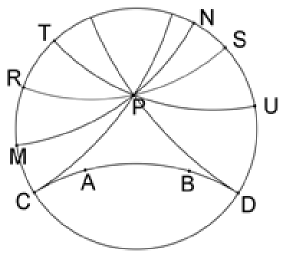


Retas no modelo de Poincaré

- A circunferência do disco de Poincaré - dita **horizonte** do plano hiperbólico - não pertence ao modelo (assim como em um intervalo numérico aberto, as extremidades não pertencem ao conjunto).
- Cada ponto do plano hiperbólico corresponde a apenas um ponto dentro do disco.
- Uma "reta" do plano hiperbólico será representada por um arco de círculo dentro do disco, e ortogonal ao horizonte, ela só será uma reta propriamente dita no caso de passar pelo centro do disco.
- O ângulo entre duas “retas” será dado pelo ângulo formado entre as tangentes aos arcos de circunferência que as representam, no ponto de interseção entre eles.

- A distância entre os pontos P e Q , não é o comprimento do arco de circunferência $\overline{PQ}$ e sim dada pela seguinte fórmula: $d(P, Q) = \left| \ln \dfrac{\overline{PA}/\overline{PB}}{\overline{QA}/\overline{QB}} \right|$, onde, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{QA}$ e $\overline{QB}$ são segmentos de reta euclidianos.

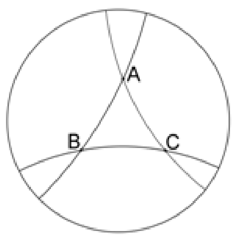
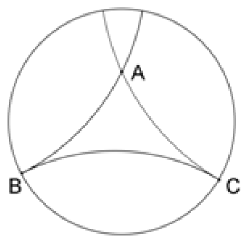
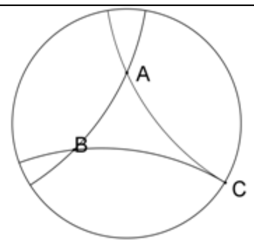
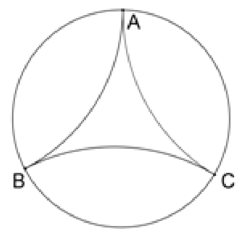
Na figura seguinte, temos a representação de “retas” paralelas e “retas” não secantes, as restantes a uma reta dada.



Retas paralelas e não secantes no modelo de Poincaré46

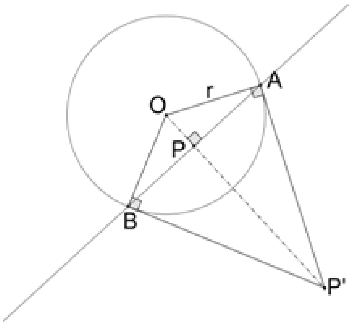
Considerando a “reta” AB da figura acima, CP e DP são paralelas a ela e as demais são não secantes, os pontos C e D são ideais.

As figuras a seguir mostram a representação, no disco de Poincaré, dos tipos de triângulos existentes na geometria hiperbólica:

Triângulo ordinário, nenhum vértice ideal, todos próprios.	**Triângulo com um vértice ideal e dois próprios.**	**Triângulo com dois vértices ideais e um próprio.**	**Triângulo com os três vértices ideais, nenhum próoprio.**
			

É importante saber, como obter “retas” hiperbólicas que passam por um ponto P dado, e também a “reta” hiperbólica que passa por dois pontos conhecidos, para isso, antes, é necessário definir o ponto inverso de um ponto P em relação a uma circunferência.

Definição: Dado um ponto P define-se o ponto P', inverso do ponto P em relação ao horizonte (circunferência do disco), como o ponto P' colinear com P e O, onde O é o centro do círculo, que satisfaz à seguinte relação $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$*, sendo r é o raio do Disco de Poincaré.*

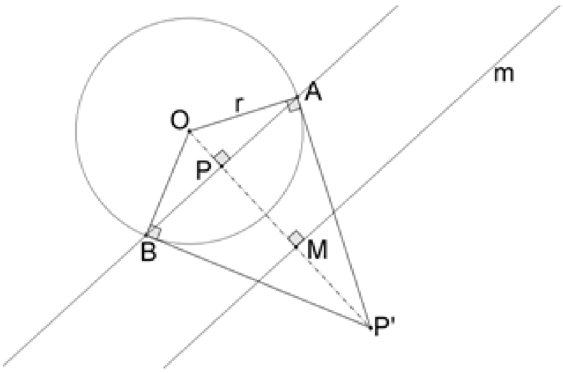


Ponto inverso no modelo de Poincaré

Considerando uma reta euclidiana AB do Disco de Poincaré que passa pelo ponto P é fácil perceber que os triângulo *OP'A e OP'B* são retângulos em A e B, respectivamente, já que o arco AB deve ser ortogonal ao disco.

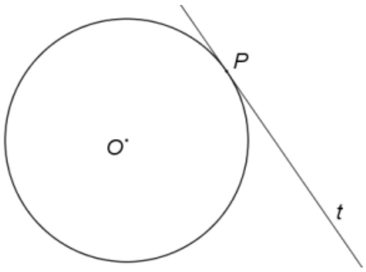
Já a relação $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$, é facilmente associada a uma das relações métricas no triângulo retângulo aplicada aos triângulos *OP'A e OP'B* da figura acima.

As "retas" que passam por *P* são representadas aqui por arcos de circunferência, com centro em qualquer ponto da reta m mediatriz de $\overline{PP'}$, condição para a manutenção da relação $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.



Reta m, mediatriz de $\overline{PP'}$, o lugar geométrico dos centros das retas que passam pelo ponto P

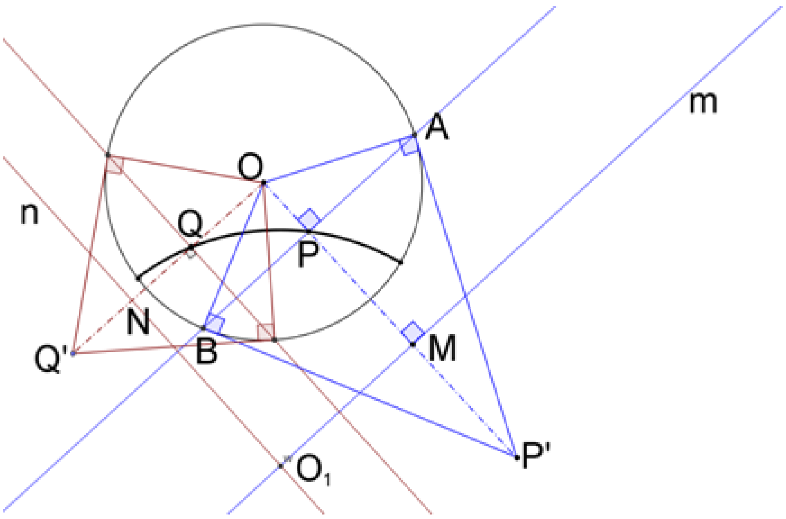
No caso particular do ponto *P* pertencer à fronteira, ou seja, à circunferência, o centro do arco que representa a "reta" poderá ser qualquer ponto diferente de *P*, que pertença à *t*, tangente euclidiana à circunferência no ponto *P*, conforme ilustra a figura ao lado.



Reta tangente à circunferência em *t*

Já é possível construir uma reta que passa por dois pontos P e Q dados, vamos considerar, a título de exemplo, a situação mais trabalhosa, isto é, os dois pontos são interiores ao disco; para isso basta determinar os pontos P' e Q', inversos de P e Q, respectivamente.

A "reta" que passa por P e Q será representada por um arco de circunferência com centro em O_1, ponto de interseção entre as retas m e n, mediatrizes de $\overline{PP'}$ e $\overline{QQ'}$, respectivamente.



reta que passa por dois pontos P e Q, dados

ATIVIDADES PROPOSTAS

Nas duas atividades propostas a seguir, a intensão é mostrar que a Geometria Hiperbólica, conteúdo que não é abordado sequer em muitos cursos superiores de matemática no nosso país, pode ser apresentada e explorada, ainda que superficialmente, em turmas do ensino básico.

Uma de construção geométrica, que poderia ser proposta inclusive numa turma de 9º ano do ensino fundamental; a outra envolvendo logaritmos apenas no ensino médio.

ATIVIDADES PROPOSTA 1

Construir, no disco de Poincaré, um triângulo que passa por três pontos dados. Medir os ângulos internos deste triângulo levará à observação de uma das características mais intrigantes da Geometria Hiperbólica: a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180º.

Se dois exercícios desse tipo forem propostos, escolhendo tipos diferentes de triângulos hiperbólicos, o aluno poderá concluir, ainda , que a tal soma não é constante.

Resultados deferentes daqueles que ele está acostumado em seus estudos de Geometria Euclidiana.

Orientações para a realização da atividade

Inicialmente temos que escolher o tipo de triângulo que vamos construir. Neste exemplo será construído um *triângulo ômega*: dois vértices(*A* e *B*) próprios, ou seja, são interiores ao disco e o terceiro (*C*) ideal, pertencente à circunferência.

Esta atividade pode ser realizada utilizando os instrumentos de desenho geométrico: régua compasso, transferidos e par de esquadros; ou num software de geometria como o Geogebra, que é o que foi usado na construção do exemplo a seguir, que calculará as medidas dos ângulos do triângulo.

Será descrito agora um passo a passo, para não ficar muito cansativo, já que há várias construções repetitivas:

1º Passo:

Construir uma circunferência que representará o *Disco de Poincaré*, e nela escolher aleatoriamente os três pontos(*A*, *B* e *C*) que representarão os vértices do triângulo a ser construído.

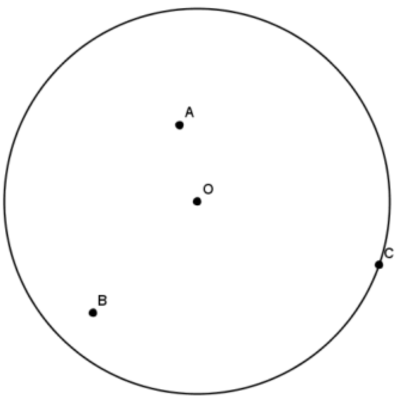


Figura 1º Passo: Disco de Poincaré, pontos *A* e *B* próprios e ponto *C* ideal

2º Passo:

Obter a reta *m* que contém os centros das “retas” que passam pelo ponto *A*, através de seu inverso *A’*, como descrito na página 8 deste artigo. Como este tipo de construção será repetida outras vezes nesta atividade, o uso de cores diferentes em cada etapa ajudará na compreensão da figura depois de pronta; esta será em vermelho.

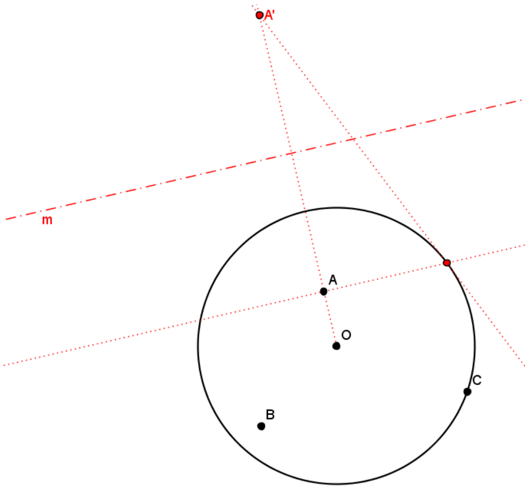


Figura 2º Passo: Obtenção da reta *m*

3º Passo:

Encontrar a reta *n* que contém os centros das “retas” que passam pelo ponto *B*, repetindo o procedimento do passo anterior; a continuação para a conclusão deste passo estará na cor azul.

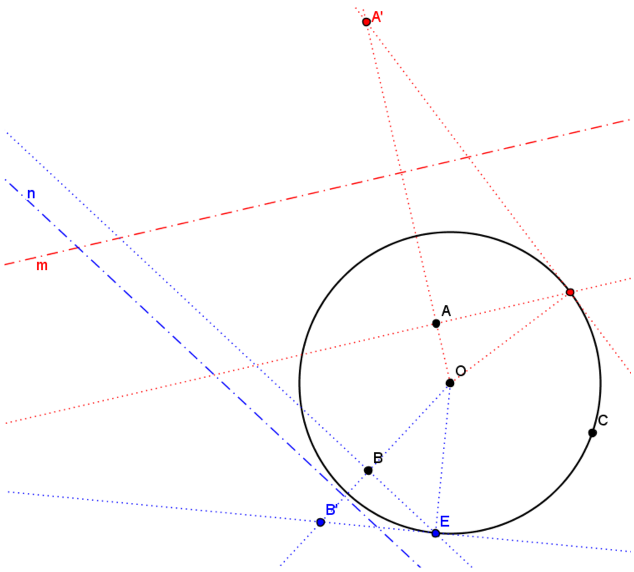


Figura 3º Passo: Obtenção da reta *n*

4º Passo:

Na interseção das retas *m* e *n* está *P*, centro do arco que representa a "reta" que passa pelos pontos *A* e *B*. Pode-se traçar agora, a reta *t* tangente à circunferência no ponto *C*, como ele pertence à circunferência ela é a reta que contém os centros das "retas" que passam por *C* esta parte estará em verde.

No encontro *n* e *t*, está o ponto *Q*, centro do arco que representa a "reta" que passa pelos pontos *B* e *C*; e na interseção das retas *m* e *t*, está o ponto *R*, centro do arco que representa a "reta" que passa pelos pontos *A* e *C* .

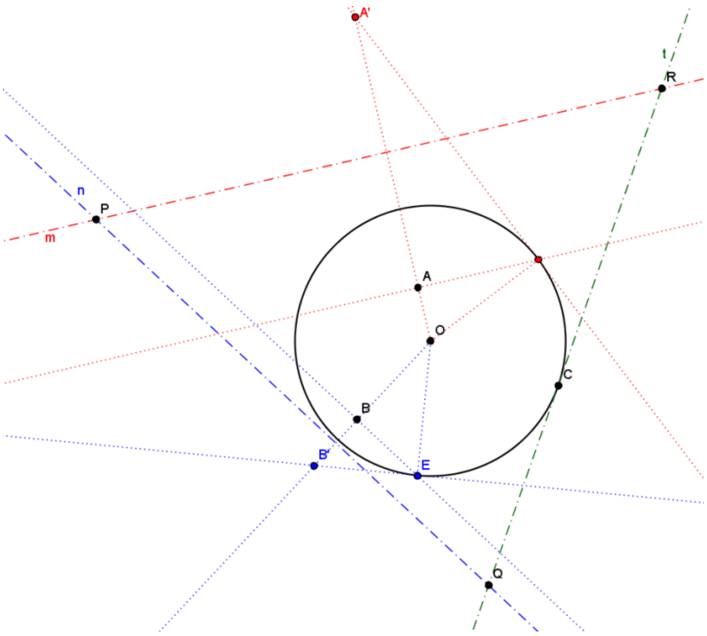


Figura 4º Passo: Construção da reta *t*, determinação dos pontos *Q* e *R*.

5º Passo:

Já é possível o triângulo *ABC*, construindo os arcos que representam seus lados: com centro em *P* e raio *PA* o lado *AB*, com centro em *A* e raio *QB* o lado *BC* e com centro em *R* e raio *RC* o lado *AC*.

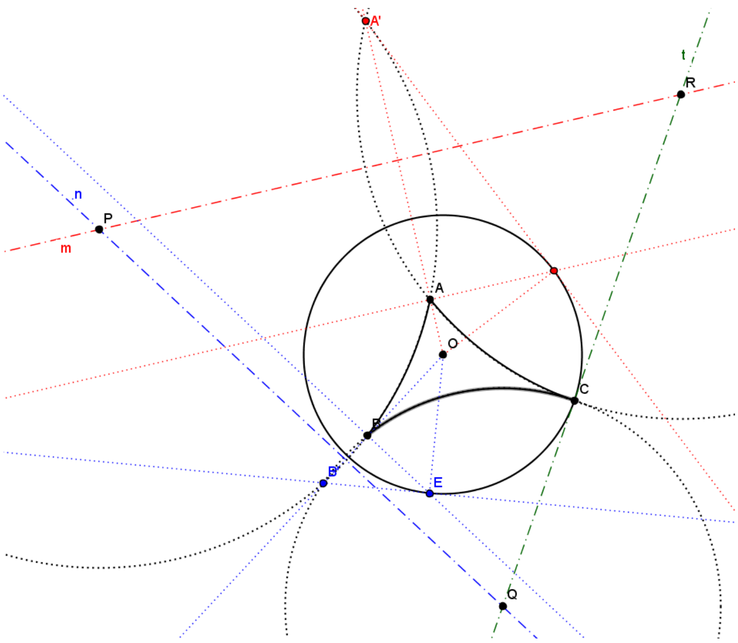


Figura 5º Passo: *Triângulo Hiperbólico ABC*, ‘Construído o triangulo *ABC*, os passos seguintes visam medir seus ângulos internos:

6º Passo:

Traçar as tangentes (em vermelho), no vértice *A*, aos “lados” *AB* e *AC*, para poder medir o ângulo no vértice *A*, o Geogebra já informa a medida deste ângulo (51,1872º).

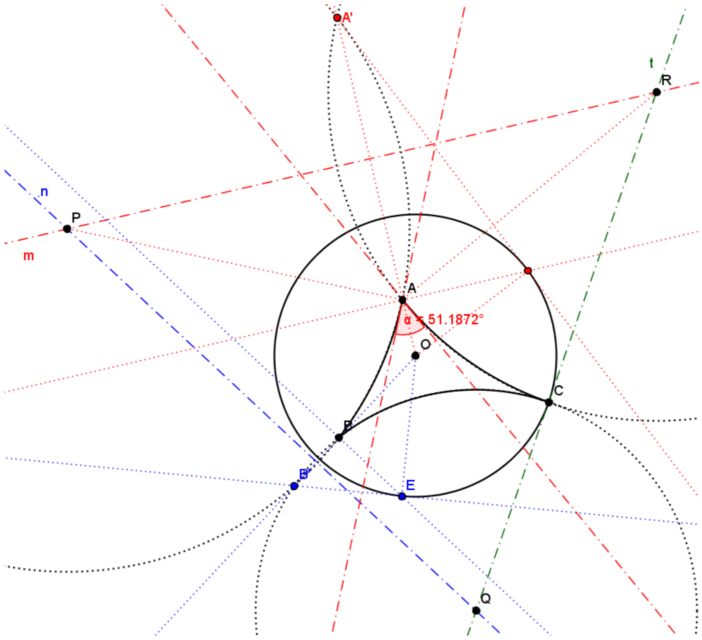


Figura 6º Passo: Ângulo no vértice *A*

7º Passo:

Repetir o procedimento do passo anterior agora para o vértice *B*. Traçar as tangentes em *B*, em azul, aos “lados” *AB* e *AB*, para poder medir o ângulo no vértice *B* (14,14662º).

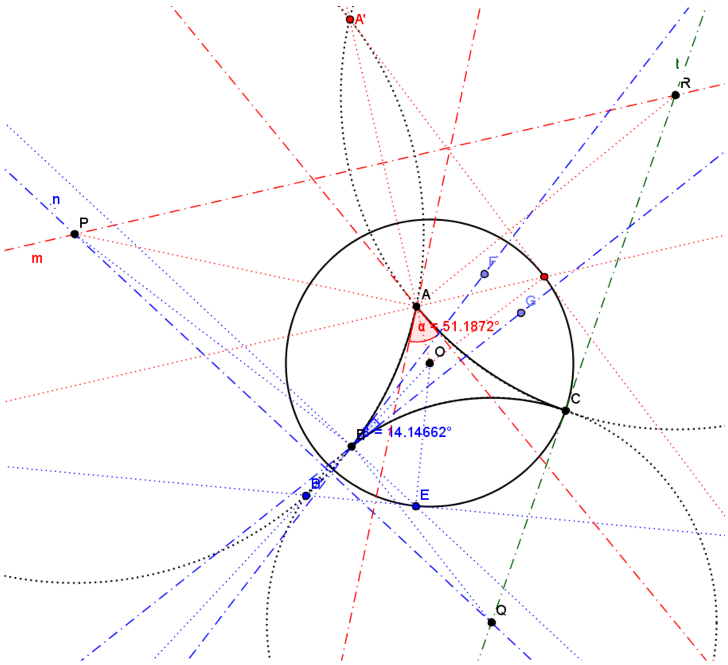


Figura 7º Passo: Ângulo no vértice *B*

8º Passo:

Como o vértice *C* é ideal, uma rápida análise sobre a construção necessária para se medir um ângulo nesta geometria, é suficiente para concluir que as tangentes aos "lados" *AC* e *AB* no ponto *B* são concedentes, portanto o ângulo no vértice *C* mede 0º, o que já é um resultado bastante surpreendente para quem está acostumado a pensar em geometria euclidiana.

9º Passo:

Somar os ângulos dos vértices A, B e *C:* 51.1872º + 14.14662º + 0º = 65.33382º. Verifica-se que a soma não é igual a 180º, mas sim inferior.

Esta uma característica dos triângulos desta geometria, diferentemente da geometria euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a 180º.

Obs 1: Se o ângulo num vértice ideal de um triângulo mede 0º, então num triângulo hiperbólico que possui os três vértices ideais, todos os ângulos são nulos, e portanto a soma dos três é 0º; conclui-se, comparando este resultado com o resultado obtido no exemplo da construção que soma dos três ângulos de um triângulo, aqui não é constante.

Obs 2: O cálculo da distância entre dois pontos na Geometria Hiperbólica usando o disco de Poincaré, poderia perfeitamente inspirar uma outra atividade para alunos do ensino médio, pois dependem de algum conhecimento sobre logaritmos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não é possível terminar este estudo sem observar alguns aspectos relevantes sobre o assunto aqui visto, passando pela educação no Brasil.

Pra começar, devo dizer que fiz graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal Fluminense e que exerço o ofício de professor há pouco mais de vinte e cinco anos; e ainda assim desconhecia completamente este assunto. Sabia apenas da existência de geometrias não euclidianas, mais nada; e sei que, quanto a este desconhecimento não sou exceção; é um assunto considerado por vários doutores pesquisadores no meio educacional como pouco conhecido pela maioria dos professores do Ensino Médio, entre os fatores que dificultam o estudo da Geometria Hiperbólica no ensino escolar, está a complexidade matemática exigida pelo tema, que a torna muito técnica inclusive para ser abordada em universidades; é defendida por eles a ideia de que o conhecimento de outras geometrias poderia ser muito útil, já que as formas encontradas na superfície do nosso planeta, em alguns acidentes geográficos e sua própria forma, mais pra elipsoidal que pra esférica, não podem ser satisfatoriamente estudadas, do ponto de vista da geometria, baseados apenas nos conceitos de ponto, reta e plano.

Achei o assunto muito interessante, tenho um grande entusiasmo pela geometria euclidiana e adorei a oportunidade de, através do trabalho de conclusão de curso que inspirou este artigo, adquirir um pequeno conhecimento sobre a existência de outras geometrias um pouco mais detalhadamente sobre geometria hiperbólica.

E ainda, de conhecer uma forma de ligar através do disco de Poincaré, de forma tão clara, esta obscura e desconhecida geometria àquela estudada durante o ensino básico.

Durante a confecção do TCC, e enquanto ia conhecendo o disco de Poincaré, fui percebendo que, se houvesse tempo para enriquecermos os conteúdos que temos que estudar com nossos alunos de ensino básico, é perfeitamente possível propor para eles a construção de triângulos hiperbólicos no Disco de Poincaré; ou do cálculo da distância entre dois pontos, bem como a construção do importante quadrilátero de Saccheri que nem foi tratado neste artigo, pois ficaria muito longo, quem sabe num próximo.

Que benefícios podem ser gerados pela realização de tais atividades?

A apresentação de alguns conceitos inicias da Geometria Hiperbólica, um primeiro contato com ela; o que, além do pequeno novo conhecimento adquirido pelos alunos, e a conscientização da existência de outras geometrias além daquela à qual eles estão habituados.

REFERÊNCIAS

COUTINHO, LAZARO.. Um Convite às Geometrias Não Euclidianas, 2. ed. Rio de Janeiro: Interciêencia, 2001.

HENRI POINCARÉ - Ciência e Hipótese - Editora da UnB, 1996.

BOYER, CARL (Tradução: GOMIDE, ELZA F.).. História da Matemática.

3 reimpressão, São Paulo, Edgard Blucher, 1981

COURANT, R.; ROBBINS, H. O que é matemática? Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

ÁVILA G.. Euclides, Geometria e Fundamentos. Revista do professor de matemática 45,2001. Acessado em 05/12/2014

Geometria Hiperbólica. III Bienal da SBM – UFG, disponível em www.ime.ufg.br/bienal/2006/poster/flavia.pdf, último acesso em 13/04/2015.

As Geometrias Esférica e Hiperbólica em Foco: sobre a Apresentação de alguns de seus Conceitos Elementares a Estudantes do Ensino Médio, disponível em www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2015000100024,

último acesso em 15/08/2015