FUNDAÇÃO OSORIO RJ
Revista Científica

Hierarquia das Operações

Operations Hierarchy

Ocarlina I. D. Borges[1]

RESUMO

O objetivo deste estudo é destacar a importância de uma estrutura de pensamento lógico matemático para o desenvolvimento e organização de um raciocínio matemático, estendendo-se o benefício às outras ciências, principalmente, as que usam estes conteúdos propostos, percebendo-se, também, a contribuição para o enriquecimento de uma postura crítica do aluno envolvido no processo, quando diante de situações problemas.

Esta estrutura lógica é descrita através da construção de um quadro-resumo, que respeita uma sequência hierárquica entre as operações, desde a mais intuitiva, a Adição, até a Logaritmação.

Com esse quadro, descobrem-se afinidades entre partes da Matemática e interdisciplinaridade da Matemática e outras ciências. Conceitos de observação e de análise são usados para a elaboração desta ideia.

PALAVRAS-CHAVE: Hierarquia, Operações, Construir, Quadro-resumo.

ABSTRACT

This study aims at highlighting the relevance of a mathematical logic thought structure capable of developing and organizing a mathematical thinking. It also has the goal of extending its benefits to the other sciences, mainly the ones that make use of the proposed contents and contribute to the increment of students' critical positionin face of problem-solving situations.

This logic structure is described by means of the building of a Summary Chart that follows a hierarchical sequence among the math operations from addition, the most intuitive, to logarithm operations.

The referred Chart shows similarities among Math parts and its interdisciplinarity with other sciences. Concepts of observation and analysis are used to build this idea.

Keywords: Hierarchy – Math Operations – Build – Summary Chart.

Introdução

Uma estrutura de pensamento lógico matemático contribui, não só, no sentido das partes da Matemática não serem tratadas de forma estanque, como também enfatiza a possibilidade da interdisciplinaridade. Investindo neste tipo de estrutura de raciocínio, surge como consequência uma tendência muito positiva de ser alcançado o ideal da transdisciplinaridade. O aluno, que vive uma experiência assim, estará mais preparado para se colocar de forma consciente e crítica, diante de determinadas questões do estudo matemático.

[1] Mestre em Educação Matemática, professora da Fundação Osorio. Área de atuação: resgate de conceitos matemáticos, em parceria com os professores do 1º e do 2º segmentos do Ensino Fundamental e Ensino Médio. prof.ocarlina@gmail.com.

Reflexão Teórica

A construção deste raciocínio lógico faz parte da proposta de resgate de conceitos matemáticos através dos erros. Esta proposta é tema da dissertação de Mestrado da autora deste artigo e guia orientadora do seu projeto de trabalho "Clínica de Matemática".

Considerando que reformular e reconstruir conceitos importantes da Matemática permite resolver, em parte, o problema da aprendizagem matemática, o resgate que é feito através destas ações passa a ser algo essencial no processo ensino-aprendizagem.

A retomada das operações, com esta visão, reorganiza conceitos básicos, possibilitando a superação da dúvida e, consequentemente, evitando novos erros. Segundo Piaget "(...) **um erro corrigido pode ser mais fecundo que um êxito imediato** (...)" (PIAGET,1976, apud LEITE, 1995)[2].

Retomando estes conteúdos há, então, o resgate da ideia de que, não mais na perspectiva da recognição platônica onde o que importa é o saber, e sim na de que a reconstrução dos conceitos enfatiza o próprio aprender, pois "aprender é tão-somente o intermediário entre não-saber e saber, a passagem viva de um ao outro" (Deleuze, 2006, apud Silvio Gallo, 2017)[3]. Para o aprendiz vale mais **viver o acontecimento** do que aquilo que é adquirido neste processo.

Silvio Gallo, em seu artigo publicado em 2017, explora o tema do aprender segundo a obra do filósofo Gilles Deleuze, valendo-se também de referências das literaturas brasileira e francesa. Considera que, atualmente, a Psicologia Educacional coloca a noção de ensino-aprendizagem, dentro dos processos educativos, procurando ligar, de forma indissolúvel, as duas ações: o **ensinar** e o **aprende**r. Gallo comenta que Deleuze ao colocar ênfase não no saber, mas no próprio aprender, enfatiza o aprender como processo, como passagem, como acontecimento. Destaca que o aprendiz é aquele que sofre e diverte-se com sua **errância**, aprendendo durante um processo então, **o que importa é o processo**.

[2] Este artigo retoma o conteúdo de uma comunicação preparada para a Piaget Society, Estados Unidos, 1976.
Le possible, l' impossible et el nécessaire, *Archives de Psychologie*, 1976, nº44,p.281-99. Tradução de Luci Banks Leite e Ana Augusta de Medeiros.

[3] Este artigo explora o tema do aprender na obra do filósofo Gilles Deleuze. Considera, também, referências das literaturas brasileira e francesa.

Gallo considera, ainda, que outra dimensão importante no aprender é a corporeidade. Cita Deleuze que introduziu a dimensão corporal, que determina a não separação entre corpo e alma, entre corpo e mente, de modo que pensar é um ato físico. Deleuze se baseou no que Espinosa, filósofo do século XVI, declarou sobre isto. Espinosa afirmou que os corpos se movimentam e se transformam. Estas transformações são chamadas de ***afecções***. A mudança que implica em um aumento da potência de agir e de pensar é ***o afeto da alegria***. Podendo-se afirmar, então, que o aprender é ***um afeto alegre***. Aprender, segundo Virgínia Kastrup (Kastrup, 2007, apud Silvio Gallo, 2017), é criar, inventar, modificar a si mesmo e aos outros.

Quando Vygotsky (1896-1934) realça a atividade sócio-histórica e coletiva dos indivíduos na formação das funções mentais superiores, está afirmando o caráter de mediação cultural do processo do conhecimento e, ao mesmo tempo, a dimensão individual da aprendizagem pela qual o indivíduo se apropria ativamente da experiência sócio-cultural (Vygotsky, 1984, p.59-65, apud Libâneo, José Carlos (UCG); Freitas, Raquel A.M.da M.(UCG),2017). Esta apropriação, sendo feita de forma ativa, leva o aprendiz a ser um elemento essencial no processo ensino-aprendizagem. Ele precisa participar da construção das ideias. Esta dimensão individual da aprendizagem é enfatizada na elaboração da Hierarquia das Operações.

A atividade é um conceito-chave, na concepção histórico-cultural da educação, que explica o processo de mediação. Esta mediação acontece entre o ser humano e a realidade objetiva. Leontiev (1903-1979) desenvolveu um desdobramento da concepção histórico-cultural surgindo, como consequência, a teoria da atividade. Demonstrou que o desenvolvimento psíquico humano é "um produto e um derivado da vida material, da vida externa, que se transforma em atividade da consciência." Pesquisou os vínculos entre os processos internos da mente e a atividade humana concreta (Leontiev, 1930, apud Libâneo, José Carlos (UCG); Freitas, Raquel A.M.da M.(UCG),2017). É, então, essencial que o aluno seja agente construtor para alcançar e assimilar o conhecimento proposto.

Na visão de Elkonin (1904-1984), a aprendizagem conduz ao desenvolvimento através da atividade, considera-se importante o papel dos fatores externos do desenvolvimento, incorporando a cultura como sua formação histórica. Davydov (1930-1988) aprofundou este tema. Incorporando conceitos de Vygotsky, Leontiev e Elkonin, formulou a teoria do ensino desenvolvimental. Considerou que a tarefa da escola contemporânea consiste em ensinar os alunos se posicionarem, independentemente, no uso das informações recebidas, ensiná-los **a pensar**, segundo um ensino que impulsione o desenvolvimento mental (Davydov, 1988, p.3).

Estas contribuições teóricas reforçam a ideia do aluno ser elemento ativo no processo ensino-aprendizagem. No construir do quadro-resumo Hierarquia das Operações, quanto mais o aluno se envolver, mais ele será capaz de apreender os conceitos e, numa interação com todo o processo e com os que participam deste processo, terá condições de aplicar, ampliar, transferir e usar, efetivamente, este quadro-resumo que ajudou a elaborar.

Construção do Conceito

Alguns erros que motivaram este resgate são comuns de serem verificados:

a. $\frac{2x+3}{4} = \frac{x+3}{2}$

Em questões de Química, quando há o uso de regra de três simples e o desenvolvimento recai na busca de uma incógnita, se reduzindo a uma equação, algumas vezes há o aparecimento deste erro.

b. $(x+a)^2 = x^2 + a^2$

No estudo de Biologia sobre Genética, o desenvolvimento do Binômio de Newton aplicado para cálculos de possibilidades de formação de indivíduos, trabalhando inclusive com o triângulo de Pascal, constata-se alguns erros deste tipo.

c. $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

Na Física, quando o estudo de Trigonometria é instrumento para o desenvolvimento e resolução de problemas, surge na aplicação deste conteúdo erros com estas características.

d. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b \cdot \log_a c$

No estudo de Química sobre pH e pOH de uma substância, ao ser aplicada a propriedade operatória “logaritmo de um produto”, muitas vezes aparece o erro de se manter a operação multiplicação ao invés de transformar para a adição.

O quadro-resumo, além de cooperar com a retomada de conceitos que envolvem estes erros, facilita a fixação de várias fórmulas e de várias propriedades, compactando, neste quadro, diferentes conteúdos matemáticos.

A partir da operação ADIÇÃO, pode-se construir a sequência do aparecimento das outras operações, resultando num quadro-resumo que obedece a uma hierarquia. A classificação em espécies, que aparece nesta hierarquia, baseia-se numa publicação do professor Elon Lages Lima (Lima, Elon Lages, 1980, Logaritmos, p. 1 e 2, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, 1985).

Considere que os dados da operação sejam colocados em destaque através do símbolo $\langle\ \rangle$ e o resultado da operação através deste outro símbolo . $[\ ]$

A Adição de parcelas 2 e 3 e soma 5 é, então, representada por $\langle 2\rangle+\langle 3\rangle=[5]$. Agora, se as informações dadas forem o 5 e o 2, como se chegar ao resultado 3? A Adição será invertida, surgindo a Subtração $\langle 5\rangle-\langle 2\rangle=[3]$. O 5 era resultado, passou a ser dado e o 3 era dado do problema e passou a ser resultado. A inversão de comportamento destes elementos gera a Subtração como operação inversa da Adição. Dados o 5 e o 3, encontra-se o 2 da mesma forma.

Pode-se, então, construir a primeira etapa do quadro-resumo “Hierarquia das Operações” (Figura 1: Hierarquia das Operações – 1ª etapa):

Figura 1

Inversa

+	-	1ª espécie

Usando o sinal “+” para representar a Adição e o sinal “-“ para representar a Subtração.

Uma Adição de 5 parcelas iguais a 2 pode ser compactada em uma Multiplicação :

$\langle 5\rangle \times \langle 2\rangle=[10]$. Conhecendo o 10 e o 5, como fazer para encontrar o 2 ? A Multiplicação será invertida, surgindo a Divisão: $\langle 10\rangle \div \langle 5\rangle=[2]$. O 10 era resultado, passou a ser dado e o 2 era dado do problema e passou a ser resultado. A inversão de comportamento destes elementos gera a Divisão como operação inversa da Multiplicação. Dados o 10 e o 2, encontra-se o 5 da mesma forma.

A Hierarquia das Operações já pode ter a sua segunda etapa descrita (Figura 2: Hierarquia das Operações – 1ª e 2ª etapas):

Figura 2

Inversa

+	-	2ª espécie
x	÷	1ª espécie

Usando o sinal “x” para representar a Multiplicação e o sinal “÷” para representar a Divisão. Lembrando que o sinal “” é usado, também, para representar a Multiplicação.

Uma Multiplicação de fatores iguais: 2x2x2 = 8, pode ser reescrita como a Potenciação:

$\langle 2\rangle^{(3)} = [8]$ onde 2 , que é a base da operação, representa o fator que aparece 3 vezes, passando este 3 a ser expoente da potência indicada e 8 o resultado desta operação, chamado de potência.

Para se obter o 2, como os elementos seriam invertidos? A operação que traduz esta intenção é a Radiciação: $\sqrt[(3)]{\langle 8\rangle} = [2]$ O 8 era resultado passou a ser dado e o 2 era dado do problema e passou a ser resultado. A Radiciação é uma das operações inversas da Potenciação.

Se é “uma das...” isto leva à certeza da existência de outra operação inversa. Para se obter o 3, expoente da Potenciação, basta operar através da Logaritmação:

$$\log_{\langle 2\rangle}\langle 8\rangle = [3]$$

Deve-se destacar que para essa operação Potenciação foi essencial o aparecimento de duas operações inversas.

Observe o sentido horário e o anti-horário das três últimas operações. A Potenciação é no sentido horário e suas inversas, no sentido anti-horário. É mais uma forma de confirmar o significado de uma operação ser a inversa de outra.

Incluindo a terceira etapa, o quadro-resumo, Hierarquia das Operações, pode ter a sua construção concluída (Figura 3: Hierarquia das Operações).

Figura 3

Inversa

log.

pot.	rad.	3ª espécie
x	÷	2ª espécie
+	-	1ª espécie

Usando o símbolo “pot.” para representar a Potenciação, o símbolo “rad.” para representar a Radiciação e o símbolo “log.” para representar a Logaritmação.

Cabe ressaltar que a posição da operação Logaritmação, acima do quadro-resumo, se deve à sua aplicação que tem como objetivo “descer” nas espécies:

. da 3ª espécie para a 2ª espécie;

. da 2ª espécie para a 1ª espécie.

Aplicação

Mas como usar esta sequência lógica de raciocínio em benefício da retomada de conteúdos, para superar erros e dificuldades, para contribuir na fixação destes conteúdos e para agilizar no uso destes mesmos conteúdos?

Exemplos:

1) Propriedades de potências de mesma base

a. $2^3 x 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

x	2ª espécie
+	1ª espécie

Potências de mesma base, multiplicadas entre si, mantêm-se a base e somam-se os expoentes.

b. $2^3 \div 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}$

÷	2ª espécie
-	1ª espécie

Potências de mesma base, divididas entre si, mantêm-se a base e faz-se a diferença entre os expoentes.

c. $\left(2^{3}\right)^{5} = 2^{3x5} = 2^{15}$

pot.	3ª espécie
x	2ª espécie

Uma potência indicada, elevada a outro expoente, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes.

d. $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^{4}$

rad.	3ª espécie
÷	2ª espécie

A raiz, de um determinado índice de uma dada potência indicada, é a base da potência elevada a um novo expoente, que é a divisão entre o expoente do radicando e o índice do radical.

2) Propriedades operatórias de logaritmos

a. $\log_{c}(a \cdot b) = \log_{c} a + \log_{c} b$

x	2ª espécie
+	1ª espécie

Logaritmo de um produto é a soma dos logaritmos dos fatores, mantendo-se a mesma base.

b. $\log_{c}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{c} a - \log_{c} b$

÷	2ª espécie
-	1ª espécie

Logaritmo de um quociente é a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor, mantendo-se a mesma base.

c. $\log_{c} a^{n} = n.\log_{c} a$

pot.	3ª espécie
x	2ª espécie

Logaritmo de uma potência indicada é o expoente, desta potência, multiplicado pelo logaritmo da base desta potência, mantendo-se a mesma base do logaritmo.

d. $\log_c \sqrt[n]{a} = \dfrac{\log_c a}{n}$

rad.	3ª espécie
÷	2ª espécie

Logaritmo de uma raiz de índice ***n*** é o logaritmo do radicando, mantendo-se a mesma base do logaritmo inicial, dividido pelo índice ***n***.

3) Sequências numéricas

	Progressão Aritmética (PA)	Progressão Geométrica (PG)
Razão	$r=a_n-a_{n-1}$	$q=a_n \div a_{n-1}$
Termo Geral	$a_n=a_1+(n-1)r$	$a_n=a_1 \cdot q^{n-1}$
Média	$a_n=\dfrac{a_{n+p}+a_{n-p}}{2}$	$a_n=\sqrt{a_{n+p} \cdot a_{n-p}}$

Tomando como referência o quadro Hierarquia das Operações, cada operação, comparadas a 1ª coluna com a 2ª coluna, sobe para a operação, **imediatamente superior**, caracterizando a mudança para a espécie correlata, **imediatamente superior**:

De:	Para:
Subtração	Divisão
Adição	Multiplicação
Multiplicação	Potenciação
Divisão	Radiciação

A razão ***r*** da progressão aritmética é a diferença entre um termo da sequência e o termo, imediatamente, anterior enquanto a razão ***q*** da progressão geométrica é o quociente entre um termo da sequência e o termo, imediatamente, anterior. Subtração, operação de 1ª espécie enquanto divisão, operação correlata de 2ª espécie, subindo da 1ª para a 2ª espécie no quadro-resumo.

÷	2ª espécie
-	1ª espécie

O termo geral a_n da progressão aritmética envolve as operações adição e multiplicação, enquanto o termo geral da progressão geométrica é definido através da multiplicação e potenciação. A adição, 1ª espécie, na PA é transformada na multiplicação, 2ª espécie, na PG. A multiplicação, 2ª espécie, na PA é transformada na potenciação, 3ª espécie, na PG. Da PA a razão ***r***, resultado de uma Subtração, operação de 1ª espécie é transformada na razão ***q***, resultado de uma Divisão, operação de 2ª espécie, na PG.

pot.	3ª espécie
x	2ª espécie
+	1ª espécie

A média aritmética envolve as operações adição, 1ª espécie, e divisão, 2ª espécie que serão transformadas na média geométrica em multiplicação, 2ª espécie e em radiciação, 3ª espécie, respectivamente.

pot.	rad.	3ª espécie
x	÷	2ª espécie
+	-	1ª espécie

O aluno, observando estas relações, será capaz de fixar estas fórmulas com mais facilidade, pela compreensão do significado de cada uma delas. Sendo as fórmulas de PA mais intuitivas, ele será capaz de transferir os significados, usando a Hierarquia das Operações, para as fórmulas da PG.

4) Operações com números complexos na forma trigonométrica

Considerando: $Z_1 = \rho_1 \left(\cos\theta_1\right) + i\left(sen\theta_1\right)$

$$Z_2 = \rho_2 \left(\cos\theta_2\right) + i\left(sen\theta_2\right)$$

as operações multiplicação e divisão ficam assim descritas:

a. Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \; sen(\theta_1 + \theta_2) \right]$$

x	2ª espécie
+	1ª espécie

O produto, entre dois números complexos, é o número complexo cujo módulo é o produto entre os módulos dos fatores, resultado de operação de 2ª espécie, e cujo argumento é a soma, resultado de operação de 1ª espécie, dos argumentos dos fatores. Todos escritos na forma trigonométrica.

b. Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \; sen(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

÷	2ª espécie
-	1ª espécie

O quociente, entre dois números complexos, é o número complexo cujo módulo é o quociente, resultado de operação de 2ª espécie, entre os módulos do dividendo e do divisor e cujo argumento é a diferença, resultado de operação de 1ª espécie, dos argumentos do dividendo e do divisor. Todos escritos na forma trigonométrica.

c. Potenciação

Considerando: $z = \rho \left(\cos \theta \right) + i \left(sen \; \theta \right)$

a operação potenciação fica assim descrita:

$$z^n = \rho^n \left(\cos n\theta \right) + i \left(sen \; n\theta \right)$$

pot.	3ª espécie
x	2ª espécie

(fórmula de Moivre)

A ***n***-ésima potência, de um número complexo, é o número complexo cujo módulo é o módulo do número complexo dado, elevado a ***n***, operação de 3ª espécie, e cujo argumento é ***n*** vezes o argumento do complexo dado, operação de 2ª espécie. Todos escritos na forma trigonométrica.

5) Propriedade distributiva

Multiplicação e Divisão são distributivas em relação à Adição e à Subtração. Potenciação e Radiciação são distributivas em relação à Multiplicação e à Divisão. No quadro-resumo, a leitura desta propriedade é feita de operações de 3ª espécie para operações de 2ª espécie e, de operações de 2ª espécie para operações de 1ª espécie. Fica bem claro, a partir da Hierarquia das Operações, a NÃO existência de propriedade distributiva da 3ª espécie para a 1ª espécie. É essencial "passar" pela 2ª espécie.

Exemplo:

3ª espécie

$$(a\pm b)^2 = (a\pm b)(a\pm b)$$

1ª espécie 2ª espécie

A partir do 2º membro da igualdade há, então, a possibilidade da aplicação da propriedade distributiva.

Propriedade distributiva só acontece da 3ª para a 2ª espécie e da 2ª para a 1ª espécie.

Figura 3

Inversa

log.

pot.	rad.	3ª espécie
x	÷	2ª espécie
+	-	1ª espécie

Considerações finais

Pode-se, então, constatar que a Hierarquia das Operações é um instrumento para se ter a retomada e a fixação de conteúdos e para alcançar um agilizar na resolução de problemas. O aluno que retoma o conteúdo e supera a dificuldade tem uma postura positiva e alegre por ter sido, nesta situação, ***vitorioso***. A aprendizagem se torna ***real***.

Verifica-se que a Hierarquia das Operações é uma estrutura lógica de pensamento que, aparecendo no estudo de diferentes partes da Matemática, leva o aluno a perceber que existe uma interação entre estas partes, descaracterizando a maneira estanque com que, muitas vezes, se trabalha na Educação Matemática. No relato deste artigo, ao ser analisado o item Aplicação, constata-se nos exemplos 1 a 5 esta interligação entre as partes da Matemática.

A construção deste quadro-resumo coopera com o desenvolvimento da observação e da organização, que será útil na Matemática como nas outras Ciências que aplicam os conteúdos descritos e, este tipo de análise auxilia na melhora da postura crítica, diante de situações problemas em que o aluno se envolve. O aluno será, diante de uma situação problema, capaz de identificar os dados, o que é pedido e se organizar, em função do conteúdo matemático envolvido na questão, e elaborar a estratégia para a solução do problema proposto.

Pode-se, então, dar crédito à capacidade do aluno em perceber que, a partir de elaborações simples, há possibilidade de se chegar a uma organização do pensamento. Sendo esta organização proveitosa para todo o segmento envolvido: alunos, professores, responsáveis e administração. Todos estariam participando do processo ensino aprendizagem, com a visão da transdisciplinaridade, que seria natural de acontecer, no momento que todos dessem a sua parcela de cooperação para um resultado efetivo de aprendizagem.

BIBLIOGRAFIA

BORGES, Ocarlina Ilderina Drummond. Resgate de Conceitos Matemáticos Através dos Erros. Rio de Janeiro, MEM/USU, 1996.

GALLO, Silvio. O Aprender em Múltiplas Dimensões. São Paulo. Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), vol. 10, nº 22 – Seção Temática, 2017.

LEITE, Luci Banks (Org.). Piaget e a Escola de Genebra. 3ª Ed. São Paulo, Cortez, 1995.

LIBÂNEO, José Carlos (UCG); FREITAS, Raquel A.M. da M. (UCG).Vygotsky, Leontiev, Davydov – Três aportes teóricos para a Teoria Histórico- Cultural e suas contribuições para a Didática. Eixo temático 3. Cultura e práticas escolares,2017.

LIMA, Elon Lages. Logaritmos. Rio de Janeiro, RJ, SBM, CAPES, FINEP, PAX, 1985.

ROXO, Euclides. A Matemática na Educação Secundária, São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1937.