Estudo de vetores e sistemas lineares com aplicações em posicionamento global

*Gabriel de Albuquerque Maciel Nogueira dos Santos**
*Valéria Saldanha Motta***

Resumo

Galileu Galilei dizia: "A matemática é a linguagem em que Deus escreveu o universo." Dessa forma, uma das maneiras de estudar matemática é observando o mundo ao nosso redor e as tecnologias desenvolvidas pela humanidade. Uma dessas invenções que revolucionaram a vida cotidiana é o sistema de posicionamento global (GPS). Este artigo propõe uma abordagem para ensinar matemática, especificamente sistemas lineares, e introduzir a disciplina de álgebra linear para alunos do ensino médio. Utilizando uma metodologia que coloca o aluno como protagonista do seu próprio aprendizado, convidamos os estudantes a entender como a matemática se aplica ao seu cotidiano por meio de uma abordagem interdisciplinar. O artigo apresenta uma introdução teórica e a resolução detalhada de um problema fictício de posicionamento global usando o Método de Gauss-Jordan, proporcionando uma compreensão prática e aplicada dos conceitos matemáticos.

Introdução

Álgebra linear e suas aplicações

Os sistemas lineares são a base da maior parte dos conceitos da álgebra linear. Eles servem em geral para modelar problemas complexos que envolvam várias incógnitas que são relacionadas linearmente. Esses problemas podem ser de várias áreas diferentes e possuir diferentes níveis de complexidade, como, por exemplo, na química, com o balanceamento de reações químicas; na economia, com o modelo de Leontief; na genética, com a análise genômica; na estatística, com regressões lineares. Além disso, também estão na área da criptografia, computação gráfica e, recentemente, em uma área que está se tornando essencial, que é a inteligência artificial.

Histórico

Não se sabe ao certo quando se deu o surgimento exato dos sistemas lineares, mas já estavam presentes no Papiro de Ahmes ou Papiro de Rhind, documento

*Aluno do 3º ano do ensino médio (CMRJ).
**Professora doutora (IME).

egípcio que data por volta de 1650 a.C., incluindo até mesmo métodos de resolução. Também há registros de tábuas de barro do antigo Império da Babilônia (1900-1600 a.C.), China (263 d.C) e Grécia (terceiro século a.C). Apesar de muitas de suas ideias já serem debatidas há muitos séculos, a disciplina só se estabeleceu de forma mais estruturada no século XX, já com o avanço da tecnologia e o advento dos computadores. Com isso, a álgebra linear se tornou cada vez mais usada e, da mesma forma, mais necessária.

Introdução aos sistemas lineares

Sistemas lineares são conjuntos de equações lineares relacionadas entre si que descrevem relações matemáticas entre certas variáveis. A álgebra linear estuda formas de descrever e resolver esses sistemas.

Muitos fenômenos na realidade podem ser aproximados por meio de relações lineares, assim essa ferramenta possui uma ampla aplicação em diversas áreas do conhecimento, desde engenharias até ciências sociais.

Uma equação linear é uma expressão matemática que descreve uma relação linear entre variáveis. Ela é composta por termos lineares, que são produtos de uma constante pelo valor de uma variável. Esse tipo de equação é caracterizado por ser uma equação polinomial de grau 1, ou seja, as variáveis estão elevadas apenas ao expoente 1.

Geralmente, uma equação linear é escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$
$$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$, são os coeficientes, e b é o termo independente.

Exemplos de equações lineares:

$$4x + y - 3z + 2w = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7$$
$$2a - 4b + 6c = 10$$

Agora exemplos de equações não lineares:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 3$$
$$\sin(x) + \cos(x) = 1$$
$$e^x - 2x = 0$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

A solução de uma equação é o conjunto de números, ou melhor, a ênupla ordenada, já que a ordem dos termos faz diferença, que, quando multiplicados pelos respectivos coeficientes e depois esses termos somados, resultem no termo independente. Ou seja, que torne a sentença verdadeira. Assim, a solução que obedece simultaneamente ao conjunto solução de todas as equações do sistema é considerada a solução do sistema.

Desenvolvimento

Métodos de resolução de um sistema linear: Método de Gauss-Jordan

O Método de Gauss-Jordan é utilizado para diversos fins na álgebra linear, sendo uma peça muito versátil desse quebra-cabeça. Ele consiste em um algoritmo que permite transformar uma matriz em sua forma escalonada reduzida. Dessa forma, torna-se possível determinar se o sistema tem alguma solução ou não, o número de soluções, até mesmo qual é essa solução; encontrar a inversa dessa matriz; entre outros usos.

O método consiste em aplicar operações específicas entre linhas, que não alteram a solução do sistema, para alcançar a matriz escalonada reduzida, uma forma simplificada, com o mesmo conjunto solução, desse sistema. Basicamente, identificam-se os pivôs e, em seguida, eliminam-se os elementos acima e abaixo deles com operações entre linhas, substituindo-os por zeros.

Os pivôs são elementos-chave em uma matriz escalonada reduzida de Gauss-Jordan. Eles desempenham um papel fundamental na determinação das propriedades e soluções de um sistema de equações lineares.

Um pivô é definido como o primeiro elemento não nulo de uma linha em uma matriz escalonada reduzida. Mais especificamente, cada pivô é o elemento que serve como ponto de referência para a eliminação dos elementos abaixo e acima dele durante o processo de escalonamento.

Uma propriedade importante dos pivôs é que eles devem ser todos iguais a 1 na forma escalonada reduzida.

As operações permitidas durante o método do escalonamento são chamadas de operações elementares, que são:

1. Troca de linhas;
2. Multiplicação de uma linha por uma constante não nula;
3. Adição/subtração de um múltiplo de uma linha a outra linha.

É importante destacar que as operações elementares não alteram as soluções do sistema de equações lineares, pois são equivalentes a manipulações algébricas das equações. Elas apenas organizam as equações e simplificam o processo de resolução.

Já a matriz escalonada reduzida (ou forma escalonada reduzida de Gauss-Jordan) deve obedecer às seguintes regras:

1. Todos os elementos abaixo e acima de cada pivô devem ser iguais a zero;
2. Cada pivô (primeiro elemento não nulo de cada linha) deve ser igual a 1;
3. Acima de cada pivô, todos os elementos devem ser iguais a zero.

O Método de Gauss-Jordan é constituído pelos seguintes passos a seguir:

Passo 1: Escreva a matriz ampliada

Comece escrevendo a matriz ampliada do sistema de equações lineares, na qual as variáveis e os coeficientes estão organizados em uma matriz, juntamente com os termos independentes. Por exemplo, a matriz ampliada de um sistema genérico com *m* equações e *n* incógnitas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Passo 2: Escolha um pivô

Selecione o primeiro elemento não nulo da primeira coluna (chamado de pivô). Se o pivô for zero, procure um elemento não nulo na mesma coluna, mas em uma linha diferente. Caso seja essa a situação, troque a linha com a primeira.

Passo 3: Faça o pivô igual a 1

Divida toda a primeira linha pelo valor do pivô para fazer com que o pivô seja igual a 1.

Passo 4: Zere os elementos abaixo do pivô

Usando operações elementares, transforme todos os elementos abaixo do pivô em zeros. Para isso, subtraia um múltiplo adequado da primeira linha das outras linhas, em geral será$^{(-n)}$ caso o pivô seja 1. Transforme em zero todos os elementos abaixo do pivô dessa coluna.

Passo 5: Escolha o próximo pivô

Mova para a próxima coluna e repita os passos 2 a 4, procurando o próximo pivô e fazendo-o igual a 1.

Passo 6: Repita o processo

Continue movendo-se pelas colunas e repetindo os passos 2 a 4 até que todas as colunas tenham sido percorridas.

Passo 7: Transforme a matriz superior em uma matriz escalonada reduzida

Utilize os pivôs obtidos anteriormente para eliminar os elementos acima desses por meio de operações elementares, como foi feito no passo 4.

Passo 8: Analise as soluções

Com a matriz na forma escalonada reduzida, é possível analisar as soluções do sistema de equações lineares. Dependendo dos elementos na última coluna da matriz (termos independentes), pode-se determinar se o sistema é consistente, inconsistente ou possui infinitas soluções.

Como dito anteriormente, a solução de um sistema linear é dada por uma ênupla ordenada, a depender da sua ordem. Assim, há três opções quanto ao número de soluções desse sistema. Ou há nenhuma solução, apenas e exclusivamente uma ou infinitas soluções. Não há opção, por exemplo, de um sistema linear ter duas soluções. Isso pode ser avaliado de diversas formas.

A primeira seria justamente pelo Método de Gauss-Jordan. Após obtida a matriz escalonada reduzida, pode haver três opções:

1. Se houver uma linha com todos os elementos iguais a zero e o termo independente correspondente for diferente de zero, o sistema é classificado como “sistema impossível” e não possui soluções;
2. Se todas as linhas tiverem pelo menos um elemento diferente de zero e o número de variáveis for igual ao número de linhas não nulas, o sistema é classificado como “sistema possível e determinado” e possui uma única solução;
3. Se houver uma linha com todos os elementos iguais a zero e o termo independente correspondente também for igual a zero, o sistema é classificado como “sistema possível e indeterminado” e possui infinitas soluções.

Posicionamento global

Localizar-se e guiar-se no espaço sempre foi um desafio para o ser humano, que, durante muito tempo, utilizou-se de formações naturais, o Sol e as estrelas ou até mesmo o campo magnético da Terra por meio de bússolas. Atualmente, no entanto, a praticidade de se saber onde se está no espaço é bem maior, permitindo comodidades e avanços tecnológicos gigantes, desde seu uso em navegação marítima e presença em robôs autônomos a transporte por aplicativo e jogos de celular nos quais o jogador consegue se deslocar no mundo físico para capturar seres virtuais. Essa praticidade vem de sistemas de GPS (*global positioning system*), que permitem a navegação por meio de satélites que fornecem a um receptor móvel sua posição em qualquer lugar na Terra, independente das condições atmosféricas, horário ou lugar.

A origem do GPS é datada do início da década de 1980. A tecnologia criada pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos foi primeiramente utilizada para atividade militar, depois seu emprego foi ampliado para o resto da sociedade. Tendo custado por volta de 10 bilhões de dólares, o sistema conta com uma constelação de 24 satélites que orbitam o planeta, como estações de controle. Além disso, atualmente, já existem outras iniciativas que buscam oferecer serviços semelhantes ao GPS. Uma das razões está relacionada à soberania das nações. Esses exemplos são o GLONASS (versão russa), o Galileo (União Europeia) e o Compass (BeiDou), que é chinês.

Descoberta da posição de um receptor GPS com base nas informações fornecidas por satélites

Imagine que se quer descobrir a posição de um receptor GPS na Terra em um instituto militar de engenharia fictício, utilizando-se de quatro satélites em órbita.

Formulação matemática do problema:

Simplificando o problema, podemos considerar um sistema de coordenadas cartesianas inicialmente. Sua origem coincidindo com o centro da Terra, o eixo z em direção ao polo norte da Terra e, por fim, o raio do planeta.

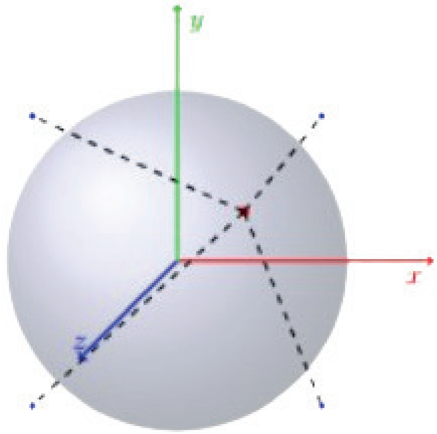

Figura 1 – Sistema de coordenadas cartesianas do problema representando a Terra
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Assumindo que todo ponto ao nível do mar obedece a equação da esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Além disso, o tempo é medido em milissegundos 10^{-3} segundos). Sendo a velocidade da luz constante e em m/s aproximadamente 3×10^8m/s e o raio da Terra em média 6.4×10^8m, podemos calcular aproximadamente a velocidade da luz em raios da Terra por milissegundo a fim de simplificar o problema:

$$C\ raios/ms \simeq \frac{6{,}4\ x\ 10^6 m}{3\ x\ 10^8 m/s} / x\ 10^{-3} \simeq\ 0{,}046875$$

Suponhamos que os dados recebidos pelo receptor tenham sido os seguintes:

Satélite	Posição x, y, z	Tempo em que o sinal foi enviado
1	(1,12;2,10;1,40)	1,06
2	(0,00;1,53;2,30)	0,56
3	(1,40;1,12;2,10)	1,16
4	(2,30;0,00;1,50)	0,75

Tabela 1 – Dados de posição e tempo dos satélites
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Seja (x, y, z) a posição do receptor de GPS na Terra e t o tempo em que os sinais chegam para um satélite qualquer.

Pela velocidade da luz multiplicada pela variação do tempo, temos a distância:

$$d = 0.047(t - t_0)$$

Usando a fórmula de distância euclidiana para pontos no espaço, temos:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Aplicando as equações anteriores para o satélite 1:

Equação 1.1:

$$d = 0.047 \cdot (t - 1{,}06)$$

Equação 2.1:

$$d = \sqrt{(x - 1,12)^2 + (y - 2{,}10)^2 + (z - 1{,}40)^2}$$

Essas equações descrevem a distância (d) entre o receptor de GPS e o satélite 1 em função do tempo (t) e das coordenadas (x, y, z). A distância é calculada como a diferença entre o tempo atual (t) e o tempo 19.9, multiplicada por 0.047. Além disso, é usada a fórmula euclidiana para calcular a distância tridimensional entre as coordenadas do receptor de GPS e as coordenadas do satélite 1.

Elevando a primeira equação ao quadrado:

$$d^2 = (0.047 \cdot (t - 1{,}06))^2$$

Elevando a segunda equação ao quadrado:

$$d^2 = (x - 1{,}12)^2 + (y - 2{,}10)^2 + (z - 1{,}40)^2$$

Desenvolvendo os termos ao quadrado, temos que a equação anterior pode ser escrita como:

$$2x \cdot x_0 + 2y \cdot y_0 + 2z \cdot z_0 - 0{,}004418 \cdot t_0 \cdot t = x^2 + y^2 + z^2 + t_0^2$$

ou seja,

$$2{,}24x + 4{,}2y + 2{,}8z - 0{,}466t = x^2 + y^2 + z^2 - 0{,}22t^2 + 7{,}377$$

Tendo quatro satélites, fazemos o mesmo para os outros três satélites restantes:

$$E1: 2.24x + 4.2y + 2.8z - 0.466t = x^2 + y^2 + z^2 - 0.22t^2 + 7.377$$
$$E2: 0x + 3.06y + 4.6z - 0.246t = x^2 + y^2 + z^2 - 0.22t^2 + 7.562$$
$$E3: 2.8x + 2.24y + 4.2z - 0.510t = x^2 + y^2 + z^2 - 0.22t^2 + 7.328$$
$$E4: 4.6x + 0y + 3.06z - 0.33t = x^2 + y^2 + z^2 - 0.22t^2 + 7.507$$

Como os termos quadrados de todas as equações são os mesmos, pode-se subtrair as três últimas da primeira, obtendo o seguinte sistema linear com três equações e quatro incógnitas. Assim, obteremos a solução em função de um parâmetro.

$$\begin{aligned}
L1: \quad & E2 - E1 \\
& (0x + 3.06y + 4.6z - 0.246t) - (2.24x + 4.2y + 2.8z - 0.466t) = 0 \\
& -2.24x - 1.14y + 1.8z + 0.22t = 0.185 \\
L2: \quad & E3 - E1 \\
& (2.8x + 2.24y + 4.2z - 0.510t) - (2.24x + 4.2y + 2.8z - 0.466t) = 0 \\
& 0.56x - 1.96y + 1.4z - 0.044t = -0.049 \\
L3: \quad & E4 - E1 \\
& (4.6x + 0y + 3.06z - 0.33t) - (2.24x + 4.2y + 2.8z - 0.466t) = 0 \\
& 2.36x - 4.2y + 0.26z - 0.136t = 0.13
\end{aligned}$$

Assim, obtemos o sistema linear:

$$\begin{aligned}
-2.24x - 1.14y + 1.8z + 0.22t &= 0.185 \\
0.56x - 1.96y + 1.4z - 0.044t &= -0.049 \\
2.36x - 4.2y + 0.26z - 0.136t &= 0.13
\end{aligned}$$

Como descrito anteriormente, pode-se resolver o sistema pelo Método de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix}-2.24 & -1.14 & 1.08 & 0.22 & 0.185\\ 0.56 & -1.96 & 1.04 & -0.044 & -0.049\\ 2.36 & -4.2 & 0.26 & 0.136 & 0.13\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Divida } L_1 \text{ por } -2.24} \begin{bmatrix}1 & 0.5089 & -0.8036 & -0.0982 & -0.0826\\ 0.56 & -1.96 & 1.04 & -0.044 & -0.049\\ 2.36 & -4.2 & 0.26 & 0.136 & 0.13\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Subtraia } 0.56\times L_1 \text{ de } L_2} \begin{bmatrix}1 & 0.5089 & -0.8036 & -0.0982 & -0.0826\\ 0 & -2.245 & 1.85 & 0.011 & -0.0028\\ 2.36 & -4.2 & 0.26 & 0.136 & 0.13\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Subtraia} 2.36\times L_1 \text{ de } L_3} \begin{bmatrix}1 & 0.5089 & -0.8036 & -0.0982 & -0.0826\\ 0 & -2.245 & 1.85 & 0.011 & -0.0028\\ 0 & -5.4011 & 2.1564 & 0.3678 & 0.3249\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Divida } L_2 \text{ por } -2.245} \begin{bmatrix}1 & 0.5089 & -0.8036 & -0.0982 & -0.0826\\ 0 & 1 & -0.8241 & -0.0049 & 0.0012\\ 0 & -5.4011 & 2.1564 & 0.3678 & 0.3249\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Subtraia} -5.4011\times L_2 \text{ de } L_3} \begin{bmatrix}1 & 0.5089 & -0.8036 & -0.0982 & -0.0826\\ 0 & 1 & -0.8241 & -0.0049 & 0.0012\\ 0 & 0 & -2.2943 & 0.3413 & 0.3315\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Divida } L_3 \text{ por } -2.2943} \begin{bmatrix}1 & 0.5089 & -0.8036 & -0.0982 & -0.0826\\ 0 & 1 & -0.8241 & -0.0049 & 0.0012\\ 0 & 0 & 1 & -0.1488 & -0.1445\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Subtraia } -0.8241\times L_3 \text{ de } L_2} \begin{bmatrix}1 & 0.5089 & -0.8036 & -0.0982 & -0.0826\\ 0 & 1 & 0 & -0.1275 & -0.1178\\ 0 & 0 & 1 & -0.1488 & -0.1445\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Subtraia } -0.8036\times L_3 \text{ de } L_1} \begin{bmatrix}1 & 0.5089 & 0 & -0.2178 & -0.1987\\ 0 & 1 & 0 & -0.1275 & -0.1178\\ 0 & 0 & 1 & -0.1488 & -0.1445\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Subtraia } 0.5089\times L_2 \text{ de } L_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -0.1529 & -0.1387\\ 0 & 1 & 0 & -0.1275 & -0.1178\\ 0 & 0 & 1 & -0.1488 & -0.1445\end{bmatrix}$$

Figura 2 – Solução utilizando o Método de Gauss-Jordan
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Da equação 3 do sistema, obtemos a variável z :

$z = -0.14450 + 0.14877t$

Da equação 2 do sistema, obtemos a variável y :

$y = -0.11785 + 0.12749t$

Da equação 1 do sistema, obtemos a variável x :

$x = -0.13873 + 0.15287t$

Respostas:

$x = -0.13873 + 0.15287t$

$y = -0.11785 + 0.12749t$

$z = -0.14450 + 0.14877t$

$t = t$

Obtemos, assim, as equações paramétricas a seguir:

$x = -0.13873 + 0.15287t$

$y = -0.11785 + 0.12749t$

$z = -0.14450 + 0.14877t$ *e*

$t = t$

Para encontrar t, basta substituir as expressões em qualquer uma das equações quadráticas para cada satélite. Caso substitua em $E4$ e simplifique, obterá:

$$8{,}639 - 0{,}945t - 0{,}158t^2 = 0$$

Vamos usar a fórmula quadrática, ou de Báskhara:

$$\left(t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right), onde(a = -0.158), (b = -0.945) e (c = 8.639)$$

$$t = \frac{-(-0.945) \pm \sqrt{(-0.945)^2 - 4 \cdot (-0.158) \cdot 8.639}}{2 \cdot -0.158}$$

$$t = \frac{0.945 \pm \sqrt{0.893025 + 5.475592}}{-0.316}$$

$$t = \frac{0.945 \pm \sqrt{6.368617}}{-0.316}$$

$$t = \frac{0.945 \pm 2.522665}{-0.316}$$

Agora, calculamos as duas soluções:

$$t_1 = \frac{0.945 + 2.522665}{-0.316} = 4.985 \quad t_2 = \frac{0.945 - 2.522665}{-0.316} = -10.959$$

Como $t \geq 0$, utiliza-se $t = t_1$.

Substituindo t nos valores obtidos antes:

$$\begin{aligned} x &= -0.13873 + 0.1528 \\ y &= -0.11785 + 0.12749t \\ z &= -0.14450 + 0.14877t \end{aligned}$$

Substituindo $(t_1 = 4.985)$ nas equações:

Para (x):

$$x = -0.13873 + 0.15287 \cdot 4.985$$
$$x = -0.13873 + 0.76003$$
$$x = 0.6213$$

Para (y):

$$y = -0.11785 + 0.12749 \cdot 4.985$$
$$y = -0.11785 + 0.63535$$
$$y = 0.5175$$

Para (z):

$$z = -0.14450 + 0.14877 \cdot 4.985$$
$$z = -0.14450 + 0.74229$$
$$z = 0.5978$$

Portanto, a tripla ordenada $((x, y, z))$ é $((0.6213, 0.5175, 0.5978))$, que são justamente as coordenadas do local citado no início do problema. Para se comprovar que realmente é um ponto ao nível do mar, basta substituir os valores obtidos em

$$d = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

1 devido à distância do mar até o centro da Terra, centro do referencial escolhido.

$$d = \sqrt{0.6213^2 + 0.5175^2 + 0.5978^2}$$
$$d = \sqrt{0.38628269 + 0.26780625 + 0.35719684}$$
$$d = \sqrt{1.01128578}$$
$$d \approx 1.0056$$

Conclusão

A pesquisa abordou a importância da álgebra linear na educação de alunos do ensino médio, destacando suas aplicações em tecnologias do cotidiano e em diversas carreiras, como engenharia, economia e ciência da computação. A iniciação científica nesse campo ajuda a desenvolver habilidades analíticas e de resolução de problemas cruciais para carreiras STEM.

O estudo focou na aplicação dos conceitos teóricos da álgebra linear ao sistema de GPS como estudo de caso. Essa abordagem proporcionou uma compreensão mais sólida da teoria, ao mesmo tempo em que ressaltou o impacto prático da matemática em tecnologias comuns. A evolução histórica da navegação e localização no espaço, desde métodos baseados em fenômenos naturais até a praticidade atual do GPS, foi explorada.

Ao analisar mais profundamente a mudança de referencial de um satélite em órbita, o estudo formulou o problema em um contexto matemático simplificado. Foi considerado um sistema de coordenadas cartesianas centrado na Terra, e equações da esfera foram utilizadas para modelar a superfície da Terra. Parâmetros como a velocidade da luz e o raio da Terra foram empregados para simplificar cálculos.

Em conclusão, a pesquisa destacou como o estudo aprofundado da álgebra linear, por meio de aplicações práticas como o GPS, pode fortalecer as habilidades necessárias para carreiras relacionadas a STEM. A integração entre teoria e prática foi extremamente importante.

Referências

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IME/UNICAMP). Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/index.html. Acesso em: 10 maio 2023.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar, 4**: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

CURSOS USP. Disciplina: MAT3457 - **Álgebra Linear 1**. Prof. Dr. Claudio Possani. IME-USP. Disponível em: https://youtu.be/QCijNiH7ywQ. Acesso em: 10 maio 2023.

EQUACIONA COM PAULO PEREIRA. Matrizes, determinantes e sistemas lineares. YouTube. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=lZ9onrdpusA&list=PLEfwqyY2ox868TPa8vjL-QPfQlmtqRGa5. Acesso em: 10 maio 2023.

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. 1. ed. Bookman Editora, 2006.