

# Identificação de sistemas não lineares por meio do ajuste de modelos LPV com coeficientes polinomiais

Itamar Pifano Silva<sup>1\*</sup>, Roberto Ades<sup>2</sup>, Paulo Cesar Pellanda<sup>1</sup>, Marcelo de Araujo Oliveira<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Instituto Militar de Engenharia - Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, CEP 29.270-030

<sup>2</sup> Centro Federal de Educação Tecnológica – Av. Maracanã, 229, Maracanã, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, CEP 20.271-110

\*itamarps@ime.eb.br

roberto.ades@cefet-rj.br

pcpellanda@ieee.org

oliveira.marcelo@ime.eb.br

**RESUMO:** Este artigo apresenta um método para a identificação ou ajuste de modelos LPV com coeficientes polinomiais. O método é aplicável a sistemas multivariáveis e para a aproximação do comportamento de sistemas não lineares. Discute-se também a extensão para múltiplos parâmetros variantes. Um modelo de suspensão de um automóvel foi empregado para ilustrar o método proposto, tendo sido ajustados modelos com parâmetros endógenos e exógenos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Identificação de sistema; Sistemas não lineares; Sistemas LPV; Quasi-LPV; Modelos LPV.

**ABSTRACT:** This paper presents a method for the identification or tuning of LPV models with polynomial coefficients. The method is applicable to multivariable systems and to fit the behavior of nonlinear systems. It also presents an extension for multiple varying parameters. A Quarter-Car suspension model was used to illustrate the proposed method, and models with endogenous and exogenous parameters were adjusted.

**KEYWORDS:** System identification; Nonlinear systems; LPV systems; Quasi-LPV; LPV model.

## 1. Introdução

**E**m termos de controle de sistemas não lineares, entre as abordagens propostas na literatura consta o clássico método de *gain scheduling*, que faz uso dos métodos de projeto linear e suas ferramentas já consolidadas. Apesar de ser bastante empregado, este não garante a estabilidade e o desempenho fora dos pontos de operação considerados nos projetos lineares, especialmente nos casos em que a taxa de variação paramétrica é elevada. O fato de existir uma ligação entre a formulação de LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e a Teoria de Lyapunov tem permitido que os critérios de estabilidade e desempenho desenvolvidos para sistemas lineares sejam estendidos para sistemas lineares não estacionários, em especial para a classe geral de sistemas LPV (do inglês *Linear Parameter Varying*) [1].

O controle LPV, com estabilidade local ou global e desempenho garantidos em grandes envelopes do domínio de operação de sistemas multivariáveis, tem se apresentado como uma alternativa real ao clássico

método de *gain scheduling*. Os ganhos dos controladores LPV são automaticamente programados sem a necessidade de nenhum método *ad hoc* ou interpolação. Desde meados da década de 1990, as técnicas de controle LPV evoluíram significativamente através de três métodos distintos [2, 3]: politópicos, de gradeamento e LFT (do inglês *Linear Fractional Transformation*). Nos métodos politópicos, consideram-se os modelos de alguns pontos de operação, em princípio gerados pelos valores extremos das coordenadas do vetor de parâmetros variantes. Os demais pontos de operação são obtidos a partir da combinação afim entre esses modelos extremos, o que pode não ser verdadeiro. A desvantagem deste tipo de abordagem está relacionada também com o conservadorismo, que provavelmente incluirá uma gama de situações que, apesar de consideradas, podem não ocorrer na prática. Por outro lado, o problema de otimização a ser resolvido, inicialmente de dimensão infinita, se transforma em um problema com dimensão finita e igual ao número de vértices do politopo, uma vez que os demais modelos são determinados pela combinação afim dos modelos nesses vértices [4, 5, 6].

Nos métodos de gradeamentos, testa-se o espaço de parâmetros variantes em um *grid* de valores, considerando trajetórias realistas. A vantagem desse tipo de metodologia é a redução do conservadorismo em relação a abordagem politópica. Encontram-se na literatura algoritmos recursivos e por LMIs desse tipo de metodologia. Por outro lado, ela apresenta sérias restrições em relação ao número de parâmetros variantes, isto é, o esforço computacional cresce exponencialmente e inviabiliza o tratamento de sistemas LPV com mais de dois parâmetros variantes. Além disso, conta-se também com a hipótese de que o sistema sob análise seja relativamente bem-comportado, de maneira que sua dinâmica possa ser aproximada sem um grande aumento da densidade do *grid* [7, 8, 6].

No caso das abordagens LFT, o modelo LPV deve ser transformado em um modelo LFT. Com isso, as aplicações desta metodologia ficam restritas aos casos em que os modelos LPV apresentam funções específicas dos parâmetros variantes, como por exemplo funções polinomiais dos parâmetros variantes. Uma vez obtido o modelo LFT, a síntese  $\mu$  e outras podem ser empregadas para o cálculo do controlador [9, 10].

Uma grande variedade de aplicações de controle LPV foi inicialmente desenvolvida na área aeronáutica, porém as aplicações estão se expandindo para diversas outras áreas, sendo validadas por experimentos ou simulações de alta fidelidade, conforme apresentado em [11]. Um dos principais gargalos hoje na aplicação das técnicas de controle LPV é a ausência de métodos para obtenção de modelos LPV. Essa necessidade promoveu o interesse da comunidade científica que atua na área de identificação de sistema, de forma a se conseguir produzir modelos de sistemas não lineares ou não estacionários, com o objetivo final de uso dos métodos de controle LPV existentes.

Os métodos de identificação de sistemas visam a obtenção de modelos a partir dos sinais medidos das entradas e saídas de uma planta sob estudo [12]. Basicamente, podem ser classificados em duas frentes, dependendo da estrutura do modelo: a identificação paramétrica e a não paramétrica. O caso da identificação não paramétrica envolve uma estrutura não determinada e, consequentemente, um número in-

determinado a priori de parâmetros. A identificação não paramétrica LPV tem basicamente se dividido em três principais abordagens: (a) da função de dispersão; (b) da máquina de vetor de suporte de mínimos quadrados LS-SVM (do inglês *Least Squares-Support Vector Machine*) e (c) baseadas na configuração Bayesiana, respectivamente [13, 14, 15] *apud* [16]. Quanto à estimativa paramétrica, a estrutura a ser identificada encontra-se estabelecida previamente e um número determinado de parâmetros deverá ser ajustado.

Os métodos de identificação de sistemas LPV [17] podem ser classificados, conforme definido em [18], em duas principais áreas, de acordo com a representação matemática utilizada, LPV-IO (do inglês, *Input-Output*) e LPV-SS (do inglês, *State Space*).

Os métodos LPV-SS adotam uma representação discreta em espaço de estado ou sua equivalente LFR (do inglês, *Linear Fractional Representation*), que permitem a representação de sistemas MIMO (do inglês, *Multiple-Input Multiple-Output*). Mais informações sobre as abordagens que fazem uso da estrutura LPV-SS podem ser obtidas em [18].

Este trabalho faz uso da representação LPV-IO, que utiliza como estrutura matemática os modelos discretos de séries temporais. Na maioria dos casos, faz uso da configuração de predição de erro LTI e geralmente é tratado somente para o caso SISO (do inglês, *Single-Input Single-Output*). Um modelo discreto na forma de séries temporais pode ser representado como:

$$y(k) = -\sum_{i=1}^n a_i(\theta)q^i y(k) + \sum_{j=0}^m b_j(\theta)q^j u(k) + e(k) \quad (1)$$

em que  $q$  é o operador de atraso no domínio do tempo, de forma que:

$$q^p y(k) = y(k-p) \quad (2)$$

A variável  $e(k)$  é o ruído do processo, normalmente um ruído branco com média nula,  $n \geq m$ , e os coeficientes  $\{a_i\}_{i=1}^n$  e  $\{b_j\}_{j=0}^m$  são dependentes do parâmetro  $\theta$ .

A estimativa dos coeficientes  $a_i$  e  $b_j$  no modelo (1) pode ser realizada conforme definido em [18]:

(i) Abordagem por interpolação. Os métodos que utilizam essa abordagem são aqueles oriundos do

clássico conceito de *gain-scheduling*, caracterizados por considerar como ponto de operação valores específicos do parâmetro variante que, uma vez congelado, determina a estrutura de predição de erro do sistema LTI, permitindo a identificação de modelos locais. O modelo global é obtido através da interpolação dos modelos locais, conforme desenvolvido em [19, 20].

(ii) Abordagem por associação de conjuntos. Nesse caso, o ruído nos dados medidos é tratado como incerteza determinística e, em vez de uma estimativa direta dos coeficientes, é calculado um conjunto de valores viáveis deles, conforme apresentado em [21, 22]. Este conjunto viável representa os valores dos coeficientes que satisfazem a equação do modelo em (1) e a priori com um erro assumido menor ou igual ao do ruído nos dados medidos. Uma estimativa direta do coeficiente é obtida calculando-se a média dos valores no conjunto viável. Geralmente, essa abordagem utiliza métodos de programação não convexa.

(iii) Abordagem por programação não linear. Os coeficientes  $\{a_i\}_{i=1}^n$  e  $\{b_j\}_{j=0}^m$  do modelo de séries temporais em (1) são estimados por meio de métodos de programação não linear para minimizar o erro médio quadrático de predição [13, 23]. O objetivo é realizar uma melhor estimativa que a dos métodos de regressão linear. Em alguns casos, isso é feito por meio de uma parametrização não linear:

$$\begin{aligned} a_i(\theta) &= \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}Z \\ b_j(\theta) &= \beta_{j,0} + \beta_{j,1}Z \end{aligned}$$

em que  $\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}, \beta_{j,0}$  e  $\beta_{j,1} \in \mathbb{R}$  e a variável  $Z$  é a saída de uma rede neural artificial que utiliza como entradas o vetor de saídas  $[(y(k) \ y(k-1) \ \dots)]^T$ , o vetor de entradas  $[(u(k) \ u(k-1) \ \dots)]^T$  e o vetor das medidas do parâmetro variante  $[(\theta(k) \ \theta(k-1) \ \dots)]^T$  do sistema a ser identificado. Esta abordagem, na maioria dos casos, utiliza um procedimento misto de programação linear e não linear por meio de métodos de regressão linear combinados com redes neurais.

(iv) Abordagem por regressão linear. Emprega-se estruturas de modelos lineares de séries temporais discretas, como por exemplo o ARX (do inglês *Autoregressive with Exogenous Inputs*), bastante difundido na literatura de identificação de sistemas LTI, o qual

faz parte do pacote de identificação de sistemas do software MATLAB®.

No caso LPV, os coeficientes  $\{a_i\}_{i=1}^n$  e  $\{b_j\}_{j=0}^m$  de (1) são funções polinomiais do parâmetro variante, como:

$$\begin{aligned} a_i(\theta) &= \alpha_{i,0} + \sum_{p=1}^{N_i} \alpha_{i,p}\theta^p \\ b_j(\theta) &= \beta_{j,0} + \sum_{p=1}^{M_j} \beta_{j,p}\theta^p \end{aligned}$$

Dessa forma, faz uso do conceito de predição do erro LTI via mínimos quadrados, recursivos ou não, bem como variáveis instrumentais que conduzem a um ajuste melhor na presença de sinais com ruído. Como resultado, um modelo linear nos parâmetros é obtido por regressão linear, conforme o trabalho precursor de [24], abordagem utilizada neste trabalho.

Em [25] é proposto um método de identificação LPV-IO pela abordagem por regressão linear, que busca uma estrutura de modelo parcimoniosa, não paramétrica, que possa capturar a dependência desconhecida dos coeficientes  $\{a_i\}_{i=1}^n$  e  $\{b_j\}_{j=0}^m$  em função do parâmetro variante em (1). Essa dependência pode variar entre as formas polinomial, racional ou ainda funções descontínuas. Para obter uma solução eficiente, é proposto no artigo o método LS-SVM, que conduz a uma construção do modelo sem as informações a priori de ordem e atraso do sistema em estudo. Originalmente desenvolvido como uma classe dos métodos de aprendizagem supervisionado, conforme apresentado em [26, 27] *apud* [25], onde é usado para obter a estrutura do modelo.

Em [28], um método baseado em IV (do inglês, *Instrumental-Variable*) para correção de viés foi desenvolvido para a identificação de modelos SISO LPV-IO, do tipo ARX, a partir de medições da saída e do sinal do parâmetro variante, corrompidas por ruído. O processo de ruído associado à saída é considerado colorido, de média zero e com distribuição desconhecida, enquanto as medições do sinal do parâmetro variante são afetadas por um ruído gaussiano branco. O método proposto elimina o viés resultante dos métodos originários de LS (do inglês, *Least-Squares*)

quando negligenciam o ruído de medição existente no sinal do parâmetro variante. Assim, fornece uma estimativa consistente de modelos LPV com dependência polinomial do parâmetro variante, cujo instrumento usado só precisa ser não correlacionado com o ruído que corrompe as observações de saída. Dessa forma, uma aproximação para o parâmetro variante sem ruído não precisa ser calculada.

O trabalho desenvolvido em [29] é uma análise do critério de predição de erro um passo à frente usado nos processos de identificação LPV, com o objetivo de obter novas funções de *kernel* [27, 30], a serem aplicadas em processos de identificação LPV-IO de modelos não paramétricos do tipo *Box-Jenkins*.

Em [31] é apresentado um esquema de correção de viés para identificação de malha fechada de modelos LPV-IO, pela abordagem de regressão, causado pela correlação entre o sinal de entrada que excita o processo e o ruído de saída. O algoritmo de identificação proposto fornece uma estimativa consistente dos parâmetros do modelo de malha aberta quando o sinal de saída e o sinal da variável do parâmetro variante são corrompidos pelo ruído de medição.

Em [32] é apresentada uma identificação LPV-IO não paramétrica por regressão, usando LS-SVM para a estimação do ângulo de derrapagem de um automóvel de passeio, em substituição do sensor usado em automóveis comerciais, devido ao seu alto custo. A problemática do artigo é inspirada em [21], que utiliza o método de abordagem de associação de conjuntos, porém o artigo faz uso do método proposto em [25].

O trabalho de [33] apresenta um estudo de identificação LPV-IO através da abordagem de regressão, na busca de um modelo global com estrutura não paramétrica sem exigir muita informação a priori da ordem do modelo, usando o espaço de Hilbert por meio do RKHS (do inglês, *Reproducing Kernel Hilbert Space*), que corresponde a um problema de otimização quadrática global diretamente solucionável com restrições de LMI, para a seleção da estrutura do modelo parcimonioso a ser identificado.

Em [34] é apresentado um método LPV-IO por regressão *online*, em que a análise da dinâmica é realizada no domínio do parâmetro variante ou em função

deste nomeado pelos autores de regressor causal, em vez do domínio do tempo. Como resultado, os coeficientes a serem identificados são reestimados usando apenas dados presentes e, pelo menos, uma estimativa anterior, ou seja, cada predição de coeficientes não depende necessariamente de sua estimativa no instante anterior, mas de uma de suas estimativas passadas em um instante em que seus regressores causais associados são semelhantes aos presentes. O critério proposto para medir essa semelhança é a norma das diferenças entre os regressores causais atuais e os passados. O método proposto apresentou baixo custo computacional para ajuste semelhante dos coeficientes, em comparação aos métodos tradicionais *offline*.

Neste trabalho foram adotadas algumas ideias apresentadas em [24], tendo sido propostos os seguintes desenvolvimentos adicionais: extensão do método para sistemas multivariáveis; obtenção da solução a partir de um lote de dados armazenados em vez da estimação pela forma recursiva; utilização de polinômios com graus independentes em cada coeficiente do modelo; expansão com múltiplos parâmetros variantes e a realização da defasagem temporal no modelo entre a saída corrente e a entrada mais recente, que corresponde ao aumento do grau relativo da função de transferência do modelo identificado. A técnica proposta foi também utilizada para aproximar modelos não lineares no formato Quasi-LPV por modelos LPV com coeficientes polinomiais. Para ilustrar o método proposto, explorou-se um sistema de suspensão de automóvel em diversas situações, com variações de parâmetros e não linearidades, aproximando-as por modelos LPV.

Com relação à estrutura deste trabalho, a seção 2 apresenta as definições de sistemas LPV e Quasi-LPV, a seção 3 apresenta o método proposto com a extensão para sistema multivariável e expansão para múltiplos parâmetros variantes. Na seção 4, encontra-se formulado o problema tratado para suspensão de  $\frac{1}{4}$  de automóvel com diversas situações de não linearidades, dependendo do tipo e da quantidade de parâmetros variantes. Por fim, a seção 5 segue com as considerações finais e conclusões.

## 2. Sistemas LPV/Quasi-LPV

Um sistema LPV ou Quasi-LPV é aquele cujas matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  na representação em espaço de estados não são constantes e variam em função de parâmetros exógenos ou endógenos ao sistema. Esses parâmetros, que alteram a dinâmica do sistema, são denominados parâmetros variantes  $\theta$ . Um parâmetro variante exógeno é aquele que é externo ao sistema; já o endógeno é caracterizado como um parâmetro interno, representado por um dos estados do sistema ou uma função dele. Ambos os parâmetros variantes devem ser mensuráveis para que possam retratar o sistema. Dependendo dos parâmetros variantes utilizados na representação do sistema, os modelos podem ser classificados como LPV ou Quasi-LPV.

Um modelo LPV é reconhecido por ter todos os parâmetros variantes exógenos e mensuráveis. A seguir, apresenta-se a definição de modelos LPV.

**Definição 1** – Modelo LPV [35], *apud* [36]: Dado um subconjunto compacto  $P \subset \mathbb{R}^d$ ,  $F_p$  representa o operador que mapeia  $t \in \mathbb{R}^+$  em um vetor  $\theta(t) \in P$  de parâmetros externos, cujas componentes são funções contínuas por partes  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ . Considere ainda as funções contínuas,  $A:P \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B:P \rightarrow \mathbb{R}^{n \times w}$ ,  $C:P \rightarrow \mathbb{R}^{\zeta \times n}$  e  $D:P \rightarrow \mathbb{R}^{\zeta \times w}$ . Um modelo LPV de ordem  $n$  é definido como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Pode-se acrescentar que o modelo LTV (do inglês, *Linear Time Varying*) é um caso particular de sistema LPV, em que as matrizes da dinâmica dependem do parâmetro variante  $\theta(t) = t$ .

Um modelo Quasi-LPV é um modelo não linear que se assemelha ao modelo LPV em (3). Neste caso, o vetor  $\theta(t)$  é composto por dois tipos de parâmetros variantes, os exógenos e os endógenos, ambos mensuráveis.

**Definição 2** – Modelo Quasi-LPV [36]: Seja  $\theta(t) \in P$  tal que  $\theta(t) = [\Omega(t)^T z(t)^T]^T$ , em que  $\Omega(t)$  corresponde ao vetor das variáveis exógenas, de forma similar ao sistema LPV em (3), e  $z(t)$  corresponde ao vetor das variáveis endógenas, contendo alguns estados do sistema

ou funções destes, que interferem na dinâmica do sistema. O modelo Quasi-LPV pode ser definido por:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\eta}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\theta(t)) & A_{12}(\theta(t)) & B_1(\theta(t)) \\ A_{21}(\theta(t)) & A_{22}(\theta(t)) & B_2(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t)) & C_2(\theta(t)) & D(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \eta(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

em que o vetor de estados  $x(t) = [z(t)^T \eta(t)^T]^T$  e  $\eta(t)$  representa o vetor contendo os estados que não interferem nas matrizes do modelo.

O exemplo a seguir retrata uma manipulação matemática para transformar um sistema não linear em um modelo Quasi-LPV. Os parâmetros variantes endógenos considerados são os responsáveis pelas não linearidades do sistema e devem ser mensuráveis para caracterizar essa representação.

Conforme [2], a título de exemplificação, considere a planta não linear modelada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \operatorname{sen}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 + u \end{aligned}$$

em que  $u$  é a entrada do sistema e considerando  $x_1$  e  $x_2$  como os estados do modelo, pode-se definir  $x = [x_1 \ x_2]$  como o vetor de estados. Assim, uma representação Quasi-LPV desse modelo não linear poderia ser

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(x_1)/x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Essa representação pode não ser adequada, a menos que  $x_1$  e  $x_2$  sejam mensuráveis e  $x_1 \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^+$ . Nesse caso, existem somente os parâmetros variantes endógenos e  $\eta(t) = \emptyset$ . Assim  $x(t) = z(t)$  e  $z(t) = [x_1 \ x_2]^T$ .

Supondo que se tenha somente  $x_1$  mensurável, uma representação mais adequada poderia ser:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(x_1)/x_1 & 1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

que permite reescrever a equação de forma que a matriz de estado somente possua dependência na variável  $x_1$ , ou seja,  $z(t) = x_1$  e  $\eta(t) = x_2$ .

## 3. Método proposto

O problema aqui tratado consiste em ajustar um modelo LPV com coeficientes polinomiais, de forma que a

sua saída  $\hat{y}$  se aproxime, segundo alguma norma previamente definida, da saída do sistema físico não linear. A proposta é que o modelo seja discreto e esteja sob a forma de uma série temporal, cujos coeficientes possam ser polinômios dependentes do parâmetro variante  $\theta = \Theta(t)$ . Trata-se inicialmente apenas do caso SISO com um único parâmetro variante. Para identificação do modelo, considera-se que o sistema sob estudo esteja previamente monitorado com sensores, de forma que os dados temporais de suas entradas, saídas e do parâmetro variante, ainda que contínuos, sejam aquisitados segundo uma conveniente taxa de amostragem  $T$ .

Do mesmo modo que em [24], adotou-se a classe de modelos LPV discretos no tempo, parametrizados da seguinte forma:

$$A(q, \theta)y(k) = B(q, \theta)u(k) \quad (4)$$

em que  $q$  é o operador de atraso, conforme definido em (2), o qual conduz aos polinômios em função do parâmetro variante, de acordo com:

$$A(q, \theta) = 1 + a_1(\theta)q + \dots + a_n(\theta)q^n \quad (5)$$

$$B(q, \theta) = b_1(\theta)q^r + b_2(\theta)q^{r+1} + \dots + b_m(\theta)q^{r+m-1} \quad (6)$$

Além disso, considerou-se que o parâmetro variante  $\theta$ , embora contínuo, tenha sido transformado em uma função do tempo discreto, ou seja,  $\theta := \theta(kT) = \theta_k$ , em que  $T$  é o período de amostragem.

Assim, por (4), (5) e (6), a estrutura do modelo identificado, em forma de série temporal, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} y_k &= -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_n y_{k-n} + \\ &+ b_1 u_{k-r} + b_2 u_{k-r-1} + \dots + b_m u_{k-r-m+1}, \end{aligned} \quad (7)$$

em que  $y_k = y(kT)$  e  $u_k = u(kT)$ ,  $n$  é a ordem do modelo e representa o número de termos autorregressivos do sinal de saída,  $m$  é o número de termos da entrada,  $r$  é o atraso entre a saída atual e a entrada mais recente considerada, e em que  $m + r - 1 \leq n$ .

Considerou-se, ainda, que os coeficientes do modelo acima possuam dependência polinomial em relação ao parâmetro variante  $\theta = \theta_k$ . Assim,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  e  $N_i \in \mathbb{N}$ :

$$a_i = a_i(\theta) = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}\theta + \alpha_{i,2}\theta^2 + \dots + \alpha_{i,N_i}\theta^{N_i}. \quad (8)$$

Da mesma forma, para os coeficientes da variável de entrada  $u$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, m\}$  e  $M_j \in \mathbb{N}$ :

$$b_j = b_j(\theta) = \beta_{j,0} + \beta_{j,1}\theta + \beta_{j,2}\theta^2 + \dots + \beta_{j,M_j}\theta^{M_j} \quad (9)$$

O parâmetro variante  $\theta(t)$  é considerado mensurável, mas pode estar defasado da saída corrente, ou seja:

$$y_k = f(\theta_{k-\gamma}), \quad (10)$$

em que  $\gamma \in \{0, \dots, n\}$ . Usualmente, adota-se  $\gamma = 1$ , ou seja, a determinação da saída atual depende do valor de  $\theta$  no instante anterior.

Embora tenha sido adotada a estrutura em (7) na forma de série temporal, é importante observar que assim definida, possuirá uma correspondência biunívoca com os modelos na forma em espaço de estado, bastando a utilização de uma realização canônica. Desta forma, o cálculo de autovalores de um modelo poderá ser determinado da forma usual, a partir da equação característica:

$$\det(A(\theta(t)) - \lambda I) = 0.$$

Tendo em vista os exemplos na seção 4, definem-se os vetores contendo as ordens dos polinômios em cada coeficiente dos termos autorregressivos da saída e dos termos da entrada, conforme (8) e (9):

$$\begin{aligned} N &= [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \in \mathbb{N}^n \\ M &= [M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_m] \in \mathbb{N}^m \end{aligned} \quad (11)$$

O número  $\xi$  de parâmetros a serem identificados pode ser calculado por meio de:

$$\xi = n + m + \sum_{i=1}^n N_i + \sum_{j=1}^m M_j. \quad (12)$$

Dado o sistema (4), estruturado conforme (5) a (12), o **Teorema 1** mostra como são determinados os coeficientes polinomiais a serem identificados, a partir da resolução de um sistema de equações lineares e dos dados de entrada, de saída e do parâmetro variante, todos medidos previamente no sistema físico.

**Teorema 1** – Considere  $u_k, y_k$  e  $\theta_k$ , com  $k \in \{1, \dots, p\}$ , as séries de dados medidos referentes, respectivamente,

à entrada, à saída e ao parâmetro variante do sistema em (4). Os coeficientes polinomiais em (5) e (6) do modelo LPV podem ser determinados por meio da resolução do seguinte sistema de equações lineares:

$$AX = \begin{bmatrix} A_\alpha & A_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{bmatrix} = B, \quad (13)$$

em que:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} Y_{n-1,N_1} & Y_{n-2,N_2} & \cdots & Y_{0,N_n} \\ Y_{n,N_1} & Y_{n-1,N_2} & \cdots & Y_{1,N_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{p-1,N_1} & Y_{p-2,N_2} & \cdots & Y_{p-n,N_n} \end{bmatrix},$$

$$A_\beta = \begin{bmatrix} U_{n-r,M_1} & U_{n-r-1,M_2} & \cdots & U_{n-r-m+1,M_m} \\ U_{n-r+1,M_1} & U_{n-r,M_2} & \cdots & U_{n-r-m+2,M_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{p-r,M_1} & U_{p-r-1,M_2} & \cdots & U_{p-r-m+1,M_m} \end{bmatrix},$$

$$X_\alpha = -[\alpha_{1,0} \ \alpha_{1,1} \ \cdots \ \alpha_{1,N_1} \ \alpha_{2,0} \ \cdots \ \alpha_{n,N_n}]^T,$$

$$X_\beta = [\beta_{1,0} \ \beta_{1,1} \ \cdots \ \beta_{1,M_1} \ \beta_{2,0} \ \cdots \ \beta_{m,M_m}]^T,$$

$$B = [y_n \ y_{n+1} \ y_{n+2} \ \cdots \ y_p]^T \in \mathbb{R}^{p-n+1},$$

$$Y_{k,p} = y_k [1 \ \theta_{k-\gamma} \ \theta_{k-\gamma}^2 \ \cdots \ \theta_{k-\gamma}^p] \in \mathbb{R}^{p+1},$$

$$U_{k,p} = u_k [1 \ \theta_{k-\gamma} \ \theta_{k-\gamma}^2 \ \cdots \ \theta_{k-\gamma}^p] \in \mathbb{R}^{p+1}.$$

*Demonstração:* O sistema de equações lineares em (13) decorre diretamente de (7). Para um determinado instante de tempo  $t = kT$ , a equação (7) pode ser reescrita com o auxílio de (8) e (9) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_k = & -(\alpha_{1,0} + \cdots + \alpha_{1,N_1} \theta^{N_1}) y_{k-1} - \cdots \\ & -(\alpha_{n,0} + \cdots + \alpha_{n,N_n} \theta^{N_n}) y_{k-n} + \\ & +(\beta_{1,0} + \cdots + \beta_{1,M_1} \theta^{M_1}) u_{k-r} + \cdots \\ & +(\beta_{m,0} + \cdots + \beta_{m,M_m} \theta^{M_m}) u_{k-r-m+1}, \end{aligned}$$

de maneira que:

$$\begin{aligned} y_k = & [Y_{k-1,N_1} \cdots Y_{k-n,N_n} U_{k-r,M_1} \cdots \\ & \cdots U_{k-r-m+1,M_m}] \begin{bmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando que  $k \in \{n, n+1, \dots, p\}$ , chega-se ao sistema de equações lineares em (13).

O sistema linear resultante do **Teorema 1** é sobredeterminado. Vários métodos podem ser utilizados para a sua solução, como a pseudo-inversa, escalonamento e pivoteamento parcial, Gauss-Jordan e outros. Uma alternativa consiste na utilização de métodos de programação não linear, buscando a minimização de  $\|AX - B\|$ , que é um problema convexo [37]. Não obstante neste caso, por meio de transformações matemáticas, também é possível a utilização de métodos de programação linear, tais como os pacotes de resolução de LMI [38].

No caso de um sistema multivariável com  $w$  entradas e  $\zeta$  saídas, considera-se que cada uma das saídas possa ser identificada independentemente, isto é, que o problema original possa ser decomposto em um conjunto de  $\zeta$  problemas MISO (do inglês, *Multiple-Input Single-Output*) com  $w$  entradas independentes. Assim, para cada saída  $i$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, \zeta\}$ :

$$A_i(q, \theta) y_{i,k} = B_1(q, \theta) u_{1,k} + \cdots + B_w(q, \theta) u_{w,k}, \quad (14)$$

em que  $y_{i,k}$  representa a saída  $y_i$  no instante  $t = kT$ . Utilizando o **Teorema 1** e desenvolvendo (14), de forma análoga ao caso SISO, é possível determinar um sistema de equações lineares para calcular os coeficientes dependentes do parâmetro variante  $\theta$  em  $A_i$ ,  $B_1, \dots, B_w$ .

Com múltiplas entradas, o vetor  $\mathbf{M}$  em (11) se transforma em uma matriz, com cada linha apresentando os graus das expansões polinomiais dos termos de cada entrada. O número de coeficientes  $\xi$  a serem identificados em (12), considerando um único parâmetro variante  $\theta$  passará a ser:

$$\xi = n + m + \sum_{i=1}^n N_i + \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^m M_{i,j}. \quad (15)$$

### 3.1 Índices de Ajuste

A avaliação do erro de ajuste entre o comportamento do modelo e do sistema dinâmico real é realizado em duas partes. Na primeira, denominada de erro de ajuste dos coeficientes, testa-se o erro no cálculo dos coeficientes durante o processo de identificação, a partir dos dados medidos na entrada e na saída do sistema físico. Utilizando (13) e que  $v = p - n + 1$ , define-se o vetor de erro de ajuste como:

$$\begin{bmatrix} e_{a,1} \\ e_{a,2} \\ \vdots \\ e_{a,v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1v}x_v \\ b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2v}x_v \\ \vdots \\ b_v - a_{v1}x_1 - \dots - a_{vv}x_v \end{bmatrix},$$

e os índices de ajuste dos coeficientes como:

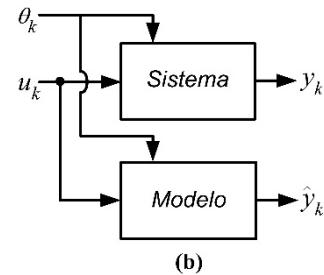
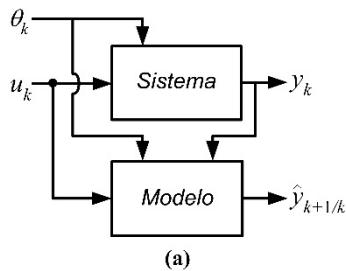
$$J_2^a = \|E_a\|_2 = \sqrt{|e_{a,1}|^2 + |e_{a,2}|^2 + \dots + |e_{a,v}|^2}, \quad (16)$$

$$J_\infty^a = \|E_a\|_\infty = \max\{|e_{a,1}|, |e_{a,2}|, \dots, |e_{a,v}|\}, \quad (17)$$

Observa-se que  $B$  é o vetor contendo as saídas medidas do sistema. Neste caso, avalia-se o erro para a geração da saída atual, considerando que as saídas medidas anteriormente estejam disponíveis. Isto corresponde à estimação um passo à frente da saída, ou seja,  $\hat{y}_{k+1/k}$ , conforme encontra-se ilustrado na Figura 1(a). Também equivale a dizer que o modelo utiliza para a estimação as medidas de saída anteriores do sistema em tempo real. É importante observar que a utilização do modelo neste formato não se confunde com a estimação recursiva, uma vez que seus coeficientes já estão determinados e não serão ajustados durante a operação.

Tendo o modelo sido identificado, é possível avaliar o erro de estimação independente do sistema, a partir de uma simulação, o que é bem mais rigoroso. Adota-se um novo sinal de entrada para a validação, com as mesmas condições iniciais para o sistema e para o modelo. Neste caso, considera-se o modelo de forma autônoma, isto é, que sua saída  $\hat{y}_k$  é gerada exclusivamente a partir da entrada fornecida e da trajetória do parâmetro variante  $\theta$  sem que haja a interferência da saída  $y$  do sistema, conforme mostra a Figura 1(b).

**Figura 1** - Simulação das saídas estimadas: (a) um passo à frente; (b) independente.



O erro para um horizonte de  $h$  períodos de simulação é avaliado da seguinte forma:

$$E_s = \begin{bmatrix} e_{s,1} \\ e_{s,2} \\ \vdots \\ e_{s,h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - \hat{y}_1 \\ y_2 - \hat{y}_2 \\ \vdots \\ y_h - \hat{y}_h \end{bmatrix} = y - \hat{y},$$

e os índices de simulação ou validação por:

$$J_2^s = \|E_s\|_2 = \sqrt{|e_{s,1}|^2 + |e_{s,2}|^2 + \dots + |e_{s,h}|^2}, \quad (18)$$

$$J_\infty^s = \|E_s\|_\infty = \max\{|e_{s,1}|, |e_{s,2}|, \dots, |e_{s,h}|\}, \quad (19)$$

Cabe observar que, utilizando condições iniciais, sinais de entrada, taxa de amostragem e tamanho de amostra iguais na simulação um passo à frente e na simulação livre, obtém-se  $J_2^a \leq J_2^s$ .

### 3.2 Expansão por Múltiplos Parâmetros Variantes

Na situação em que há múltiplos parâmetros variantes  $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \dots \ \theta_d(t)]^T$ , a expansão dos coeficientes do modelo poderá ser realizada em analogia com (8) e (9), considerando também os termos cruzados dos parâmetros variantes. Assim, para o caso de dois parâmetros variantes, os coeficientes dos termos de saída do modelo e, de forma equivalente para os de entrada, teriam o seguinte formato:

$$\begin{aligned} a_i = a_i(\theta_1, \theta_2) &= \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}\theta_1 + \alpha_{i,2}\theta_1^2 + \dots + \\ &+ \alpha_{i,N_i}\theta_1^{N_i} + \alpha_{i,N_i+1}\theta_2 + \dots + \alpha_{i,2N_i}\theta_2^{N_i} + \\ &+ \alpha_{i,2N_i+1}\theta_1\theta_2 + \alpha_{i,2N_i+2}\theta_1\theta_2^2 + \alpha_{i,2N_i+3}\theta_1^2\theta_2 + \\ &+ \dots + \alpha_{i,\frac{N_i(N_i+3)}{2}}\theta_1^{N_i-1}\theta_2 \end{aligned}$$

Também neste caso, o número de parâmetros  $\xi$  a serem identificados é impactado de maneira significativa pelo número de componentes  $d$  do vetor  $\theta(t)$ , o que inviabiliza a metodologia proposta para  $d \gg 1$ . Para  $d=2$ :

$$\begin{aligned}\xi = n + m + \sum_{i=1}^n N_i + \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{j=1}^m M_{i,j} + \\ + \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{N_i(N_i-1)}{2} + \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{j=1}^m \rho_{i,j} \frac{M_{i,j}(M_{i,j}-1)}{2}\end{aligned}$$

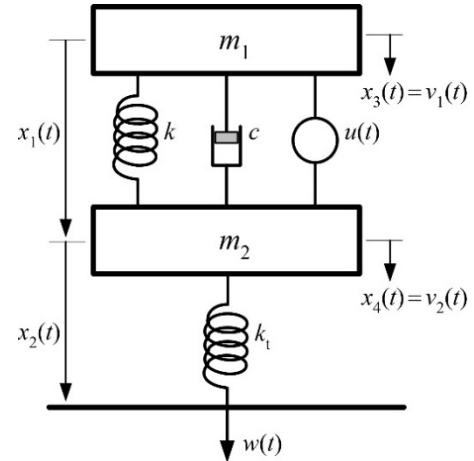
em que para  $i \in \{1, \dots, n\}$ :  $\gamma_i = \begin{cases} 0, & N_i \leq 1 \\ 1, & N_i > 1 \end{cases}$ ;  
 e para  $i \in \{1, \dots, \omega\}, j \in \{1, \dots, m\}$ :  $\rho_{i,j} = \begin{cases} 0, & M_{i,j} \leq 1 \\ 1, & M_{i,j} > 1 \end{cases}$ .

## 4. Identificação de modelos LPV em um sistema de suspensão de ¼ de automóvel

Nesta seção utiliza-se o modelo de suspensão ativa de um automóvel, de quarta ordem, conforme [39] apud [40]. Esse modelo, em cada subseção a seguir, sofreu novas considerações em relação ao parâmetro variante, o que conduziu a diferentes graus de não linearidades e possibilitou uma análise mais detalhada e estendida do método proposto.

A Figura 2 ilustra o modelo físico da suspensão ativa de ¼ de automóvel. A constante  $m_1$  representa a massa amortecida de ¼ do veículo e  $m_2$  a massa não amortecida de um conjunto roda e pneu. A mola superior, com constante elástica  $k$  e o amortecedor, com constante de amortecimento  $c$ , representam a suspensão propriamente dita do veículo. A mola inferior, com constante de elasticidade  $k_t$ , se refere ao amortecimento gerado pela deformação do pneu durante o deslocamento do veículo na pista. A perturbação  $w(t)$  representa a entrada de excitação do modelo e consiste em um sinal de velocidade vertical devido a irregularidades encontradas na pista. Já a entrada  $u(t)$  representa a força de atuação produzida pelo mecanismo de suspensão ativa. Esta tem por objetivo o isolamento das vibrações na massa  $m_1$ , além de proporcionar maior aderência do veículo à pista.

**Figura 2** - Modelo físico da suspensão ativa de ¼ de automóvel.



Para a modelagem matemática do conjunto, as variáveis de estado do sistema podem ser definidas como em [39]:

- $x_1(t)$ : distância entre as massas  $m_1$  e  $m_2$ , a partir da posição de equilíbrio;
- $x_2(t)$ : distância entre o eixo da roda e sua base, também da posição de equilíbrio;
- $x_3(t) = v_1(t)$ : velocidade vertical  $v_1(t)$  da carroceria em relação ao referencial inercial;
- $x_4(t) = v_2(t)$ : velocidade vertical  $v_2(t)$  do eixo da roda em relação ao referencial inercial.

Partindo da definição apresentada dos estados, é possível concluir que:

$$\dot{x}_1 = x_4 - x_3, \quad (20)$$

e ainda,

$$w(t) = \dot{x}_2 + x_4 \text{ ou } \dot{x}_2 = w(t) - x_4, \quad (21)$$

Aplicando a segunda lei de Newton na massa  $m_1$  e considerando que haja uma dependência linear da força com a velocidade no amortecedor, por meio da constante  $c$ :

$$m_1 \ddot{x}_3 = kx_1 + c\dot{x}_1 + u. \quad (22)$$

De (20) em (22):

$$\ddot{x}_3 = \frac{k}{m_1}x_1 - \frac{c}{m_1}x_3 + \frac{c}{m_1}x_4 + \frac{1}{m_1}u(t). \quad (23)$$

Aplicando a segunda lei de Newton na massa  $m_2$ :

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_4 &= -kx_1 + k_t x_2 + cx_3 - cx_4 - u(t), \\ \dot{x}_4 &= -\frac{k}{m_2} x_1 + \frac{k_t}{m_2} x_2 + \frac{c}{m_2} x_3 - \frac{c}{m_2} x_4 - \frac{1}{m_2} u(t), \end{aligned} \quad (24)$$

Além disso, considerou-se como variáveis de saída a aceleração da massa amortecida  $m_1$  e o estado  $x_2$  [40]. Assim, é possível escrever o modelo matemático sob a forma de espaço de estado, de acordo com:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{k}{m_1} & 0 & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{k_t}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{k}{m_1} & 0 & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \end{aligned} \quad (25)$$

em que  $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$ ,  $y_1(t)$  é a aceleração da massa  $m_1$  e  $y_2(t)$  o deslocamento da massa  $m_2$ . As saídas do modelo, conforme [40], estão relacionadas com a aceleração da massa amortecida  $x_3$  e a deformação do pneu,  $x_2$ .

Os valores nominais dos parâmetros adotados [39] foram:  $m_1 = 288,9 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 28,58 \text{ kg}$ ;  $c = 850 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ ;  $k = 10.000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ; e  $k_t = 155.900 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Em todos os casos tratados à frente, utilizou-se o período de amostragem  $T=0,0025\text{s}$  e a duração das simulações de 2 s, o que totaliza 800 períodos. Neste artigo, os modelos foram determinados com  $\gamma=0$  em (10).

No caso da suspensão ativa, considerando todos os estados mensuráveis, foi adotada a lei de controle  $u(t) = Kx(t)$ , onde  $x(t)$  é o vetor de estados, sabendo que o valor de  $K$  empregado foi obtido de modo a manter um compromisso entre o conforto dos passageiros e a aderência do pneu à pista. O valor de apresentado em [40] e utilizado neste trabalho foi:

$$K = 10^3 \times [-9,9997 \ -0,0002 \ +0,8325 \ -0,8461]$$

Para a simulação dos dados a serem utilizados na identificação, considerou-se que a base do pneu, em

contato com a pista, esteja submetida a uma perturbação em velocidade  $w(t)$  da forma:

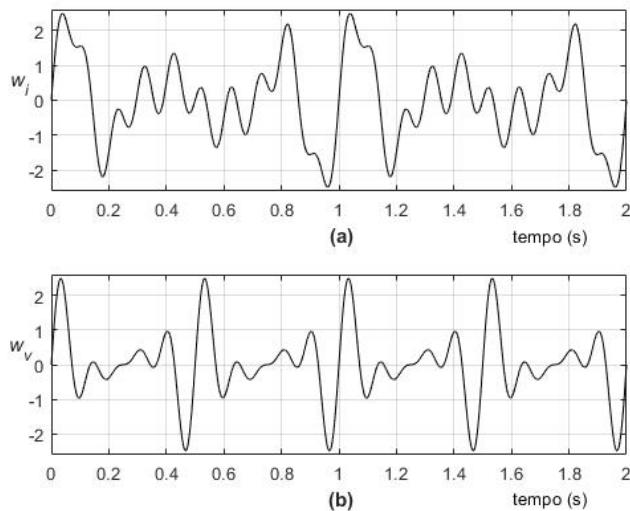
$$w(t) = w_i(t) = 0,9\text{sen}(6pt) + 0,5\text{sen}(10pt) + + 0,75\text{sen}(8pt) + 0,6\text{sen}(20pt), \quad (26)$$

e para a validação dos modelos, utilizou-se o mesmo sinal que em [40], representado pela equação:

$$w(t) = w_v(t) = 0,6\text{sen}(8pt) + 0,75\text{sen}(12pt) + + 0,9\text{sen}(16pt) + 0,5\text{sen}(20pt), \quad (27)$$

A Figura 3 apresenta os gráficos dos sinais de entrada  $w(t)$  utilizados para a identificação e validação.

**Figura 3** - Sinais de entrada para: (a) identificação  $w_i$ ; (b) validação  $w_v$ .

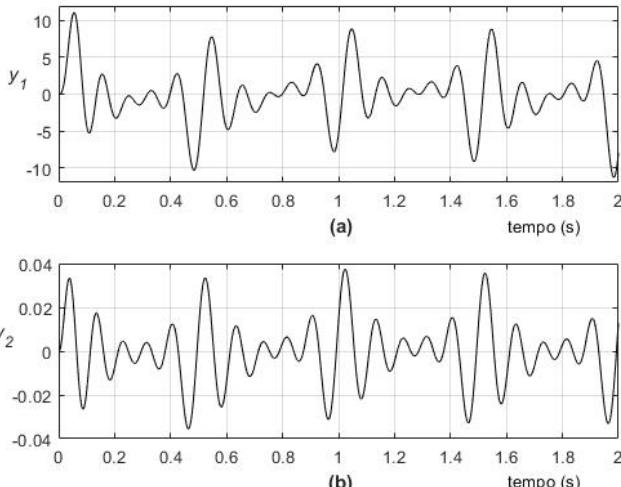


#### 4.1 Modelos LTI

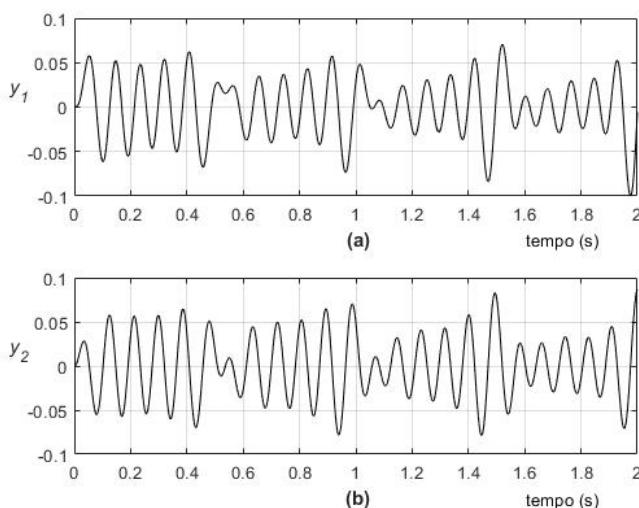
Neste item e no seguinte, considerou-se que a massa  $m_1(\theta) = 288,9 + 1000$  e o sinal do parâmetro variante  $\theta(t) = 0,5t$  para  $0 \leq t \leq 2\text{s}$ , na fase de identificação. Na validação do modelo, utilizou-se outro sinal para o parâmetro variante, isto é,  $\theta(t) = \text{sen}(0,5nt)$ . Assim, a massa apresentou valores na faixa de  $288,9 \leq m_1 \leq 388,9$ ; o que poderia corresponder ao acréscimo de passageiros e bagagens na massa não amortecida. Essa consideração é bastante conservadora em termos da taxa de variação do parâmetro variante, levando em conta um período de 2 segundos de simulação. Ou seja, uma taxa de variação do parâmetro um pouco maior ao que pode acontecer na prática, porém respeitando que todo sistema físico real é um sistema passa baixa.

As Figuras 4 e 5 mostram, respectivamente, as saídas do sistema nos casos de suspensão passiva e ativa em função da excitação com o sinal de validação  $w_v(t)$  e  $m_1(\theta)$ .

**Figura 4** - Sinais de saída para a validação do modelo de suspensão passiva: (a)  $y_1$ ; (b)  $y_2$ .



**Figura 5** - Sinais de Saída para a validação do modelo de suspensão ativa: (a)  $y_1$ ; (b)  $y_2$ .



Na Tabela 1, encontram-se as características de quatro modelos LTI que foram ajustados para as saídas  $y_1$  e  $y_2$ , nos casos de suspensão passiva e ativa, lembrando que  $m_1 = m_1(\theta)$ .

**Tabela 1** - Características dos modelos LTI identificados.

	Modelos			
	M1	M2	M3	M4
<b>susp.</b>	passiva	passiva	ativa	ativa
<b>saída</b>	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$
$n/m/r$	4/4/1	4/4/1	2/2/1	2/2/1
<b>N</b>	[0 0 0 0]	[0 0 0 0]	[0 0]	[0 0]
<b>M</b>	[0 0 0 0]	[0 0 0 0]	[0 0]	[0 0]
<b><math>\xi</math></b>	8	8	4	4
$J_2^a$	3,4697e-3	5,3165e-7	1,2436e-3	2,8967e-8
$J_\infty^a$	6,0661e-4	8,3421e-8	1,6489e-4	2,5778e-9
$J_2^s$	38,274	1,0384e-2	1,5798e-1	1,0063e-5
$J_\infty^s$	4,2958	6,8445e-4	2,4096e-2	8,5410e-7
max  $\lambda$	0,9952	0,9970	0,9994	0,9998

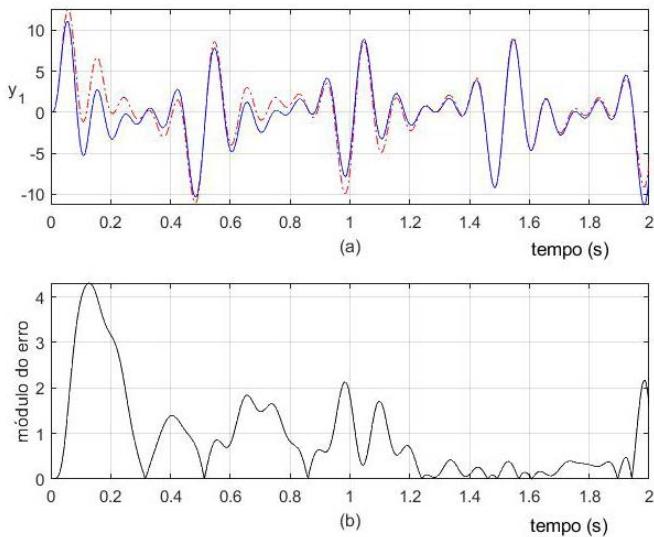
Vale mencionar [40] que a deformação  $x_2$  do pneu, quando comparadas às saídas  $y_2$  nas Figuras 4(b) e 5(b), na suspensão ativa, a excursão foi aproximadamente o dobro, enquanto a aceleração  $y_1$  na Figura 5(a) da massa  $m_1$  amortecida foi da ordem de 1% daquela ocorrida para a suspensão passiva na Figura 4(a).

Cabe observar na Tabela 1 que os elementos dos vetores **N** e **M** em (11) foram nulos, o que corresponde ao ajuste dos modelos LTI. Os valores de  $J_2^a$  e  $J_\infty^a$  nessa tabela e nas seguintes correspondem ao custo de estimativa um passo à frente, conforme a Figura 1(a), utilizando a entrada de validação  $w_v(t)$ . Também é oportuno mencionar que os modelos LTI M2 e M4 das saídas  $y_2$ , tanto para a suspensão passiva como para a ativa, tiveram ajustes satisfatórios, não sendo mais essas saídas abordadas nos próximos casos. Os gráficos dos modelos M2 e M4 são exatamente os apresentados nas Figuras 4(b) e 5(b).

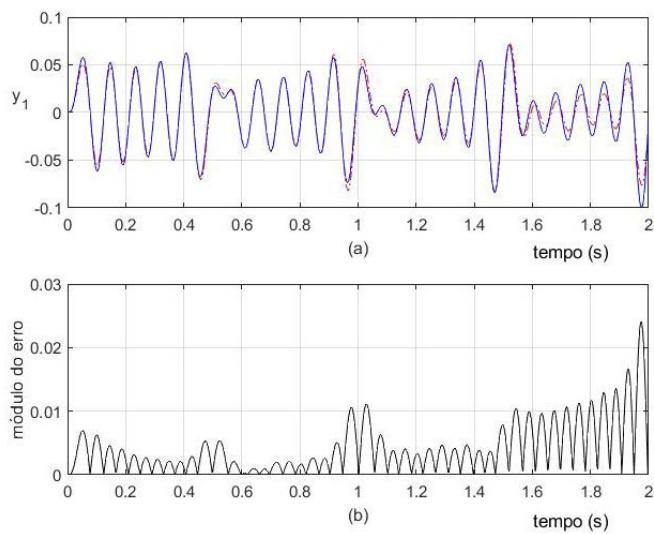
A Figura 6(a) apresenta as saídas  $y_1$  do sistema, em azul, e do modelo LTI M1 identificado, em vermelho, para a suspensão passiva. Na Figura 6(b), ilustra-se o valor

absoluto do erro entre estes sinais de saída. A Figura 7 é a equivalente da Figura 6 para o caso da suspensão ativa.

**Figura 6** - (a) Saídas  $y_1$  do sistema (azul) e do modelo LTI M1 (verm.) com suspensão passiva; (b) valor absoluto do erro entre estas saídas.



**Figura 7** - (a) Saídas  $y_1$  do sistema (azul) e do modelo LTI M3 (verm.) com suspensão ativa; (b) valor absoluto do erro entre estas saídas.



Cabe observar que os valores máximos dos erros de ajuste apresentados nas Figuras 6(b) e 7(b) correspondem aos respectivos valores de  $J_\infty^s$  na Tabela 1 para os modelos M1 e M3.

## 4.2 Modelos LPV com 1 parâmetro exógeno

Nesse caso, identificou-se os modelos lineares a parâmetros variantes (LPV) M5 e M6 na Tabela 2 que melhor reproduziram, respectivamente, o comportamento das saídas  $y_1$  da suspensão passiva e ativa do automóvel, considerando que a massa  $m_1$  é variante no tempo.

**Tabela 2** - Características dos modelos identificados em 4.2 e 4.3.

Modelos				
	M5	M6	M7	M8
<b>susp.</b>	passiva	ativa	passiva	passiva
$n/m/r$	4/4/1	2/2/1	4/4/1	4/4/1
<b>N</b>	[1 0 0 0]	[1 0]	[0 0 0 0]	[1 0 0 0]
<b>M</b>	[2 0 2 2]	[0 1]	[0 0 0 0]	[1 2 1 1]
<b><math>\xi</math></b>	15	6	8	21
$J_2^a$	5,6473e-4	3,1939e-4	3,2598e-3	3,5658e-4
$J_\infty^a$	1,0453e-4	6,0073e-5	4,0924e-4	5,6716e-5
$J_2^s$	3,1698	9,1048e-2	39,014	2,6949
$J_\infty^s$	3,4643e-1	9,2476e-3	3,8391	2,4190e-1
max  $\lambda$	0,9966	0,9995	1,0012	0,9980

Comparando os valores de  $J_2^s$  dos modelos M5 e M6 na Tabela 2 com seus correspondentes M1 e M3 na Tabela 1, verifica-se que seus ajustes são significativamente melhores, mas logicamente às custas do aumento do número de parâmetros.

A Figura 8 apresenta os valores absolutos do erro entre as saídas  $y_1$  do sistema e dos modelos validados, tanto para a suspensão passiva quanto para a suspensão ativa. Vale observar que os valores máximos absolutos desses erros nos gráficos da Figura 8 correspondem aos valores de  $J_\infty^s$  na Tabela 2. Comparando os gráficos das Figuras 6(b) e 8(a), verifica-se que o erro de ajuste do modelo LPV encontra-se na faixa de 8% dos valores apresentados pelo modelo LTI. Da mesma forma, para o caso da suspensão ativa com a saída  $y_1$ , comparando-se os gráficos das Figuras 7(b)

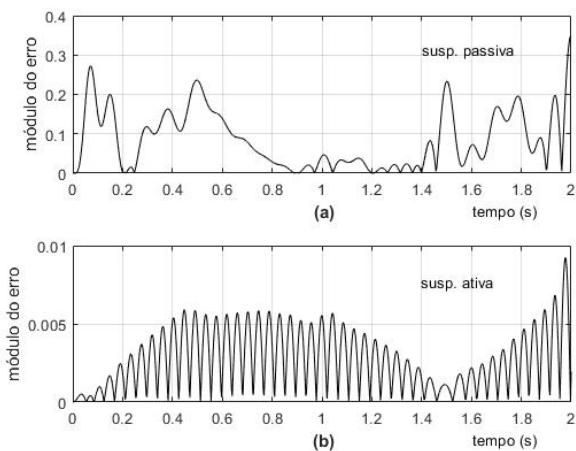
e 8(b), verifica-se que o erro de ajuste do modelo LPV apresenta valores menores que 40% daqueles do LTI.

Uma característica importante observada nos modelos LPV é que seus coeficientes dependem de  $\theta$  e, consequentemente, variam ao longo do tempo. Por este motivo, observa-se que seus autovalores também se alteram durante a simulação. Assim, como os modelos são discretos, deseja-se que os autovalores  $\lambda_i = \lambda_i(t)$  atendam a seguinte condição:

$$\max_{0 \leq t \leq 2s} |\lambda_i(t)| < 1.$$

a fim de manter a estabilidade do modelo. Contudo, verificou-se que pequenas ultrapassagens nesse limite nem sempre provocam desajustes entre a saída do modelo e a da planta. Outro aspecto que merece ser citado se refere ao aumento significativo do número de parâmetros a serem ajustados nos modelos LPV. Por fim, observou-se que o ajuste do modelo é bastante dependente da trajetória do parâmetro  $\theta$  e de sua velocidade.

**Figura 8** - Valor absoluto do erro da saída  $y_1$  para os modelos LPV: (a) M5 e (b) M6.



### 4.3 Modelos LPV com 2 parâmetros exógenos

Neste caso, considerou-se que o sistema apresenta dois parâmetros variantes exógenos independentes, que parametrizam a massa  $m_1$  e a constante elástica da mola, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m_1(\theta_1) &= 288,9 + 100\theta_1, \\ k(\theta_2) &= 9.000 + 2.000\theta_2, \end{aligned}$$

sendo que, para  $0 \leq t \leq 2$  s:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_1(t) = 0,5t, \\ \theta_2 &= \theta_2(t) = \operatorname{sen}(0,5\pi t). \end{aligned}$$

Assim, os parâmetros  $m_1$  e  $k$  variaram durante a simulação nos seguintes intervalos:

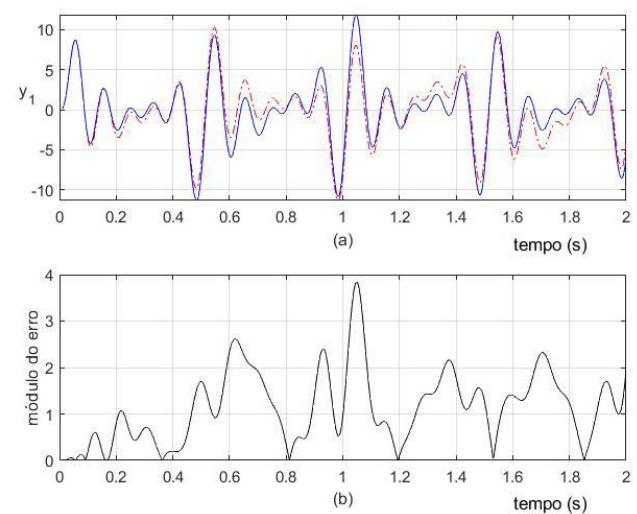
$$\begin{aligned} 288,9 &\leq m_1 \leq 388,9; \\ 9.000 &\leq k \leq 11.000. \end{aligned}$$

Os parâmetros  $\theta_1$  e  $\theta_2$  acima foram utilizados durante a identificação. Na validação,  $\theta_1 = \operatorname{sen}(0,5nt)$  e  $\theta_2 = 0,5t$ .

A Tabela 2 apresenta as características de dois modelos, M7 e M8, ajustados para a saída  $y_1(t)$ , no caso da suspensão passiva com a variação simultânea de  $m_1$  e  $k$ . O modelo M7 é do tipo LTI, enquanto o M8 é o LPV para os mesmos dados. A Figura 9 apresenta a saída estimada pelo modelo M7, em vermelho, e a correspondente saída do sistema. Observa-se na Tabela 2 que o custo de ajuste  $J_2^s$  de M8 foi menor que 7% do apresentado por M7. Vale mencionar que a saída do modelo M8 coincide com a saída do sistema, em azul, na Figura 9.

A identificação para a suspensão ativa não foi realizada, pois o controlador  $k$  em [39] leva o sistema em malha fechada para instabilidade com a variação simultânea de  $m_1$  e  $k$ .

**Figura 9** - (a) Saídas  $y_1$  do sistema (azul) e do modelo LTI M7 (verm.) com suspensão passiva; (b) valor absoluto do erro entre estas saídas.



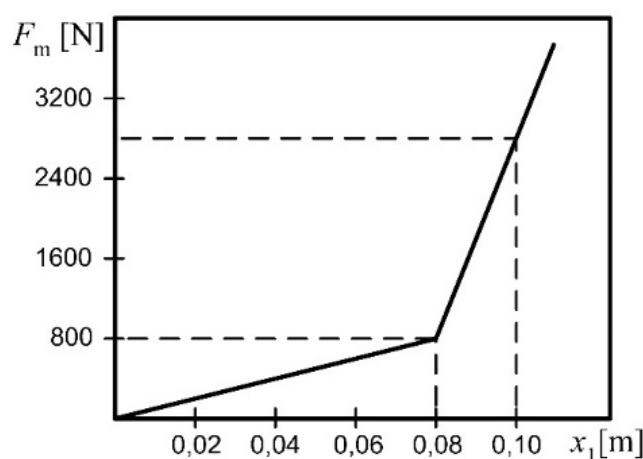
#### 4.4 Modelos LPV com 1 parâmetro endógeno

Neste caso, considerou-se a massa  $m_1 = 288,9$  kg, fixa em seu valor nominal, mas o modelo da mola foi substituído por outro mais realista [41], que considera a constante elástica  $k$  variável a partir de certa deformação, conforme a Figura 10. Como a deformação da mola é o estado  $x_1$ , então  $k$  passa a ser dependente dele, ou seja:

$$k = k(x_1) = \begin{cases} 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}, & |x_1| \leq 0,08 \text{ m} \\ \frac{800 + 10^5 (|x_1| - 0,08)}{|x_1|} \frac{\text{N}}{\text{m}}, & |x_1| > 0,08 \text{ m} \end{cases}$$

e (25) se transforma em um modelo não linear Quasi-LPV, com  $\theta = x_1$ .

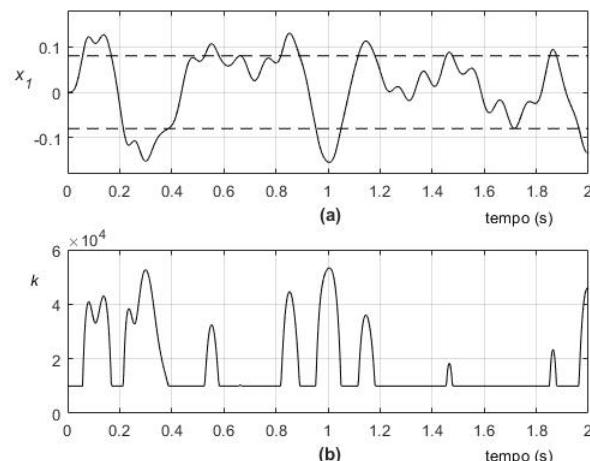
**Figura 10** - Força da mola da suspensão versus deformação.



Na Figura 11, encontra-se ilustrado o comportamento de  $x_1$  e de  $k$  ao longo do tempo para o sinal de entrada  $w_i$ . Quando a deformação  $x_1$  ultrapassa 0,08 m, caracterizada pelas linhas tracejadas na Figura 11(a), a constante elástica  $k$  da mola se torna variável, conforme a Figura 11(b).

Para este caso, foram determinados os modelos M9 e M10 da Tabela 3, que se distinguem pela estrutura paramétrica e pela quantidade de parâmetros. Os ajustes destes modelos LPV não foram tão bons quanto os identificados nos casos anteriores.

**Figura 11** - Evolução temporal para a entrada de identificação: (a) estado  $x_1$ ; (b) constante elástica da mola.



**Tabela 3** - Características dos modelos LPV identificados para a suspensão passiva em 4.4 e 4.5.

	Modelos			
	M9	M10	M11	M12
$n/m/r$	4/2/3	2/2/1	4/4/1	4/5/0
$\mathbf{N}$	[5 0 3 0]	[2 2]	[0 3 1 2]	[1 0 0 0]
$\mathbf{M}$	[3 4]	[5 2]	[4 2 1 0]	[0 0 3 1 1]
$\mathbf{x}$	21	15	45	24
$J_2^a$	4,1019	4,7566	8,0199	9,8109
$J_\infty^a$	1,7896	1,8838	2,8412	3,3706
$J_2^s$	57,719	61,040	52,349	63,038
$J_\infty^s$	6,4872	6,2101	7,5600	8,5038
$\max  \lambda $	1,0104	1,0067	1,1402	0,9294

A Figura 12 apresenta a resposta do sistema, em azul, e a do modelo validado M9, em vermelho. Entretanto, observou-se que para a estimativa um passo à frente, este modelo apresenta uma melhora significativa em seus ajustes, pois suas respostas estimadas praticamente coincidem com a do sistema, em azul, nessa figura. A Tabela 3 confirma essa informação a partir dos valores de  $J_2^a$  apresentados pelos modelos M9 e M10. Na Figura 12(b), ilustra-se a evolução

temporal do máximo módulo dos autovalores. É interessante notar que em alguns intervalos de tempo, esse ultrapassa o valor unitário.

É oportuno observar que como o estado  $x_1$  é o próprio parâmetro variante,  $\theta$  será alterado com a modificação da entrada de identificação para a de validação.

#### 4.5 Modelos LPV com 2 parâmetros endógenos

Nesse caso, considerou-se que a suspensão seja submetida a altas velocidades. Assim, um comportamento mais realista para a força gerada pelo amortecedor é que apresente uma relação cúbica com a velocidade de compressão ou de expansão. O modelo matemático deixa de ter um comportamento linear, mas pode ser transformado na forma Quasi-LPV, conforme apresentado a seguir. A equação (22) poderá ser reescrita como:

$$kx_1 + c(\dot{x}_1)^3 + u = m_1\dot{x}_3. \quad (27)$$

De (20):

$$(\dot{x}_1)^3 = (x_4 - x_3)^3 = x_4^3 - 3x_4^2x_3 + 3x_4x_3^2 - x_3^3. \quad (28)$$

De (28) em (27):

$$\dot{x}_3 = \frac{k}{m_1}x_1 - \frac{c}{m_1}(3x_4^2 + x_3^2)x_3 + \frac{c}{m_1}(3x_3^2 + x_4^2)x_4 + \frac{u(t)}{m_1}. \quad (29)$$

Desenvolvendo (24) de forma análoga, chega-se a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{k_t}{m_2}x_2 + \frac{c}{m_2}(3x_4^2 + x_3^2)x_3 + \\ &\quad - \frac{c}{m_2}(3x_3^2 + x_4^2)x_4 - \frac{u(t)}{m_2} \end{aligned} \quad (30)$$

Utilizando (20), (21), (29) e (30), chega-se ao modelo da suspensão ativa em alta velocidade:

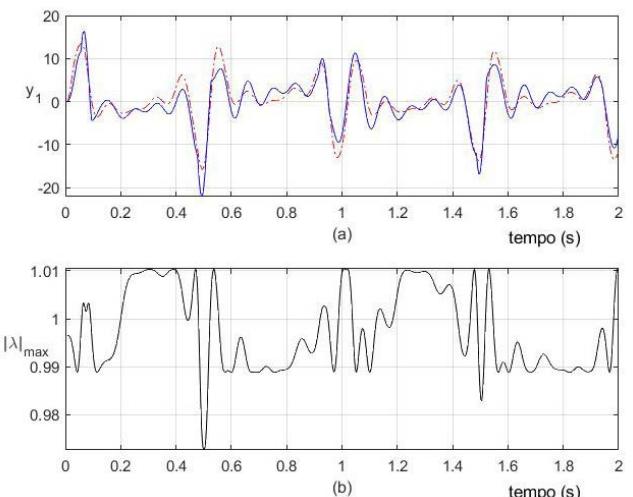
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{k}{m_1} & 0 & -\frac{c}{m_1}(3x_4^2 + x_3^2) & \frac{c}{m_1}(3x_3^2 + x_4^2) \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{k_t}{m_2} & \frac{c}{m_2}(3x_4^2 + x_3^2) & -\frac{c}{m_2}(3x_3^2 + x_4^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{m_1} & 0 & -\frac{c}{m_1}(3x_4^2 + x_3^2) & \frac{c}{m_1}(3x_3^2 + x_4^2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Pelo modelo em (31), verifica-se que os estados  $x_3$  e  $x_4$  compõem as matrizes A e C da dinâmica, transformando-o em um modelo não linear do tipo Quasi-LPV.

**Figura 12** - (a) Saídas do sistema (azul) e do modelo M9 (verm.) com suspensão passiva; (b) Máximo módulo dos autovalores durante a validação.

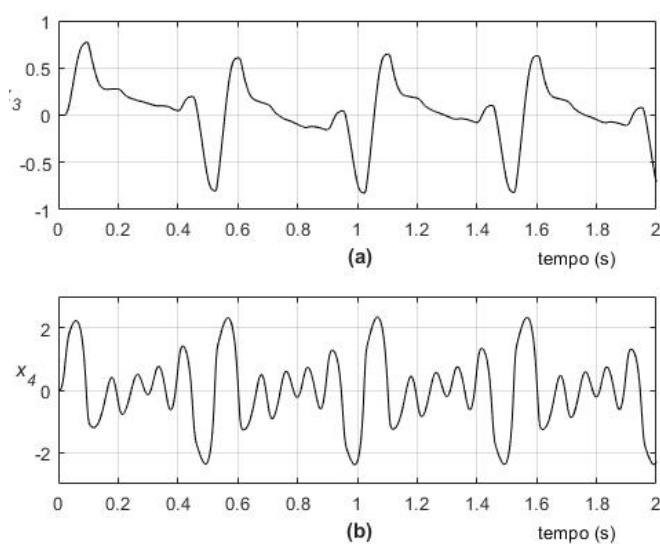


A Figura 13 apresenta a evolução temporal dos estados  $x_3$  e  $x_4$  em face da aplicação da entrada de validação. Neste caso, estes estados serão considerados os parâmetros variantes do modelo LPV.

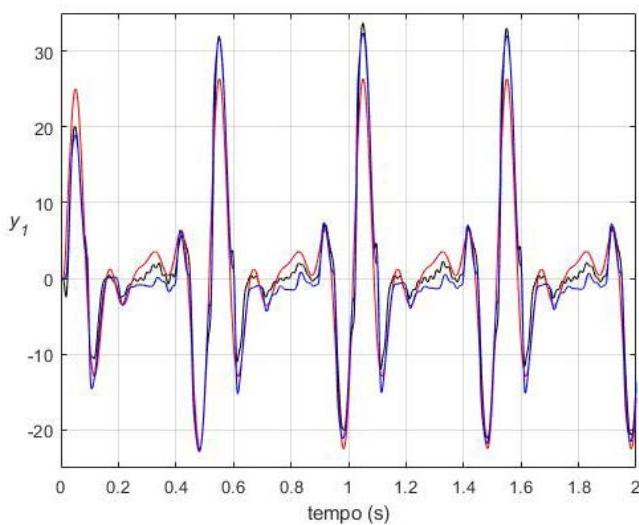
Na Tabela 3, encontram-se apresentadas as características dos modelos M11 e M12, ajustados para este problema. Embora M12 tenha um desempenho pior em relação a M11, no que se refere ao custo  $J^s$ , ele foi selecionado devido ao critério da parcimônia, por apresentar um número de parâmetros significativamente menor.

Mesmo que o ajuste não tenha sido perfeito, ainda assim é bem melhor que o do correspondente modelo LTI, que possui  $J_2^s = 90,21$ . Esse modelo não foi apresentado nas tabelas, mas a Figura 14 mostra, a curva de saída do sistema (azul), do modelo M11 (preto) e a saída desse modelo LTI (vermelho).

**Figura 13** - Evolução do estado com a entrada de validação: (a)  $x_3$ ; (b)  $x_4$ .



**Figura 14** - Saídas  $y_1$  da suspensão passiva para o sistema (azul), M11 (preto) e LTI (verm.).



## 5. Conclusões

Neste artigo, apresentou-se um método multivariável para a identificação de modelos LPV com coeficientes polinomiais. Entre as aplicações do método, além da identificação propriamente dita, existe a possibilidade de aproximar modelos não lineares por modelos LPV, com a finalidade de aplicação de técnicas de controle LPV. Os resultados foram explorados por meio de um exemplo relacionado com a suspensão de um automóvel. Diversos casos foram abordados, com múltiplos parâmetros variantes endógenos e exógenos, procurando aproximar inclusive sistemas não lineares do tipo Quasi-LPV. Algumas contribuições em relação às ideias de [24] foram implementadas, como a extensão do método para sistemas multivariáveis, a obtenção da solução a partir de um lote de dados, a utilização de polinômios com graus independentes por parâmetro, a possibilidade de realizar a defasagem temporal entre a saída corrente e a entrada mais recente no modelo, bem como a extensão do método para múltiplos parâmetros variantes. Embora os ajustes dos modelos LPV tenham sido significativamente melhores que os modelos LTI, em contrapartida, há também um grande aumento do número de parâmetros a serem determinados. Observou-se, ainda, que o gráfico do máximo módulo dos autovalores do modelo ao longo do tempo é uma importante ferramenta para analisar a qualidade do modelo identificado e de sua estrutura paramétrica escolhida. Vale lembrar que a estimativa um passo à frente apresentou excelentes resultados para todos os modelos apresentados, embora haja a dependência das medidas de saída do sistema em tempo real. Por fim, verificou-se, principalmente na aproximação de sistemas não lineares, a forte dependência para o ajuste do modelo com a trajetória do parâmetro variante e com sua taxa de variação.

## Agradecimentos

Este artigo foi elaborado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

- [1] SIMÕES, A.M. Controle linear a parâmetros variáveis de sistemas não lineares. Dissertação (Mestrado) — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2004.
- [2] RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S.; Survey paper research on gain scheduling. *Automatica*, v.36, n.10, p.1401-1425, 2000.
- [3] MOHAMMADPOUR, J.; SCHERER, C. W. (Ed.). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. New York: Springer, 2012.
- [4] BECKER, G.; PACKARD, A. K. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically dependent linear feedback. *Systems & Control Letters*, v.23, n.3, p.205-215, 1994.
- [5] APKARIAN, P.; GAHINET, P.; BECKER, G.; Self-scheduled  $H^\infty$  control of linear parameter-varying systems: A design example. *Automatica*, 31, n.9, p.1251-1261, 1995.
- [6] PELLANDA, P. C. ; Commande de Systèmes Instationnaires: Séquencement de Compensateurs et Commande LPV. Thèse (Docteur) — L'Ecole Nationale Supérieure de L'Aéronautique et de L'Espace, Toulouse, 2001.
- [7] WU, F.; Control of linear parameter varying systems. Thesis (PhD, University of Berkeley, Berkeley, 1995.
- [8] APKARIAN, P.; ADAMS, R. J.; Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v.6, n.1, 1998.
- [9] APKARIAN, P.; GAHINET, P.; A convex characterization of gain-scheduled  $H^\infty$  controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.40, n.5, p.853-864, 1995.
- [10] ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; Robust and optimal control. London: Pearson, 1996.
- [11] HOFFMANN, C.; WERNER, H.; A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v.23, n.2, p.416-433, 2015.
- [12] LJUNG, L.; System Identification: Theory for the User Second Edition. London: Prentice Hall PTR, 1999.
- [13] HSU, K.; VINCENT, T. L.; POOLLA, K.; Nonparametric methods for the identification of linear parameter varying systems. In: *Proceedings of the International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, San Antonio, p.846-851, 2008.
- [14] PIGA, D.; TÓTH, R.; LPV model order selection in an LS-SVM setting. In: *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 2013.
- [15] GOLABI, A.; MESKIN, N.; TÓTH, R.; MOHAMMADPOUR, J.; A bayesian approach for estimation of linear regression LPV models. In: *IEEE Conference on Decision and Control*, 53, p.2555-2560, 2014.
- [16] DARWISH, M. A. H.; COX, P. B.; PROIMADIS, I.; PILLONETTO, G.; TÓTH, R.; Prediction-error identification of LPV systems: A nonparametric gaussian regression approach. *Automatica*, v.97, p.92-103, 2018.
- [17] SANTOS, P. L.; PERDICOÚLIS, T. P. A.; NOVARA, C.; RAMOS, J. A.; RIVERA, D. E.; Linear parameter-varying system identification: new developments and trends. Hackensack: World Scientific, 2012.
- [18] TÓTH, R.; Modeling and identification of linear parameter-varying systems. Berlin: Springer, 2010.
- [19] FUJIMORI, A.; LJUNG, L.; Model identification of linear parameter varying air-craft systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, v.220, n.4, p.337-346, 2006.
- [20] GHOSH, D.; BOMBOIS, X.; HUILLY, J.; SCORLETTI, G.; MERCIÈRE, G.; Optimal identification experiment design for LPV systems using the local approach, *Automatica*, v.87, p.258-266, 2018.
- [21] CERONE, V.; PIGA, D.; REGRUTO, D.; Set-membership LPV model identification of vehicle lateral dynamics. *Automatica*, v.47, n.8, p.1794-1799, 2011.
- [22] CERONE, V.; PIGA, D.; REGRUTO, D.; A convex relaxation approach to set-membership identification of LPV systems. *Automatica*, v.49, n.9, p.2853-2859, 2013.
- [23] LAURAIN, V.; GILSON, M.; TÓTH, R.; GARNIER, H.; Refined instrumental variable methods for identification of LPV Box-Jenkins models. *Automatica*, v.46, n.6, p.959-967, 2010.
- [24] BAMIEH, B.; GIARRÉ, L.; Identification of linear parameter varying models. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v.12, n.9, p.841-853, 2002.
- [25] TÓTH, R.; LAURAIN, V.; ZHENG, W. X.; POOLLA, K.; Model structure learning: A support vector machine approach for LPV linear-regression models. In: *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 50, p.3192-3197, 2011.
- [26] VAPNIK, V. N.; *Statistical Learning Theory*. Hoboken: John Wiley & Sons, 1998.
- [27] SCHÖLKOPF, B.; SMOLA, A. J.; *Learning with kernels: support vector machines, regularization, optimization, and beyond*. Cambridge: MIT Press, 2002.

	<b>M9</b>	<b>M10</b>	<b>M11</b>	<b>M12</b>
1	-2,1451	-1,8308	-2,6426	-2,8394
2	1,9944e-1	8,0398e-2	3,0743	-1,9056e-2
3	-3,2760	-4,5524	-1,9459e-1	2,1094e-3
4	-24,188	8,3022e-1	-1,2791e-2	3,4121
5	28,608	-5,1005e-2	-2,7967e-2	-2,0704
6	536,92	4,9448	-1,2417e-1	5,2334e-1
7	1,4962	8,8089e-1	-4,5444e-2	-255,01
8	-3,3536e-1	-9,3699e-1	3,4387e-3	1024,2
9	-1,2673e-1	-5,1392e-1	9,8325e-2	-1548,7
10	2,9411	70,379	-1,2912e-2	-5,6339
11	10,771	-850,63	3,6693e-2	1,1043e-1
12	-1,5032e-2	-4000,2	-1,6806	-1,0481e-1
13	8,7969e-1	-8,7297e-1	4,6561e-1	1,8862e-1
14	-5,7447e-1	6,8925e-1	2,1312e-1	2,5113e-2
15	15,912	16,264	3,3240e-1	7,4621e-3
16	144,42		-2,3406e-1	-1,0500e-1
17	-8,5403e-1		-2,3056e-2	-4,1403e-2
18	7,6552e-1		-1,0547e-1	9,2937e-2
19	-5,0067		2,7712e-2	1045,4
20	-176,37		-6,0313e-2	11,942
21	-565,46		-8,8240	-5,4097e-1
22			-3,6792	-265,75
23			3,8992	-6,4258
24			-1,4866e-1	3,4988e-1
25			-3,3907e-1	
26			-9,5981e-2	
27			7,8418e-1	
28			2,0652e-2	
29			-3,9837e-2	
30			-2,6922	
31			-1,1238e-1	
32			2,9413e-1	
33			2,7791e-1	
34			-5,6398e-1	
35			5,4148e-1	
36			26,288	
37			6,5098	
38			-3,2759	

- [28] PIGA, D.; COX, P.; TÓTH, R.; LAURAIN, V.; LPV system identification under noise corrupted scheduling and output signal observations. *Automatica*, v.53, p.329-338, 2015.
- [29] DARWISH, M. A. H.; COX, P. B.; PROIMADIS, I.; PILLONETTO, G.; TÓTH, R.; Prediction-error identification of LPV systems: A nonparametric Gaussian regression approach. *Automatica*, v.97, p.92-103, 2018.
- [30] PILLONETTO, G.; DINUZZO, F.; CHEN, T.; de Nicolao, G.; LJUNG, L.; Kernel methods in system identification, machine learning and function estimation: A survey. *Automatica*, v.50, n.3, p.657-682, 2014.
- [31] MEJARI, M.; PIGA, D.; BEMPORAD, A.; A bias-correction method for closed-loop identification of linear parameter-varying systems. *Automatica*, v.87, p.128-141, 2018.
- [32] BRESCHI, V.; FORMENTIN, S.; RALLO, G.; CORNO, M.; SAVARESI, S. M.; Vehicle sideslip estimation via kernel based LPV identification: Theory and experiments. *Automatica*, v.122, 2020.
- [33] LAURAIN, V.; TÓTH, R.; PIGA, D.; DARWISH, M. A. H.; Sparse RKHS estimation via globally convex optimization and its application in LPV-IO identification. *Automatica*, v.115, 2020.
- [34] ALEGRIA, E. J.; GIESBRECHT, M.; BOTTURA, C. P.; Causal regression for online estimation of highly nonlinear parametrically varying models. *Automatica*, v.125, 2021.
- [35] BECKER, G. S.; Quadratic stability and performance of linear parameter dependent systems. Ph.D. thesis, University of California-Berkeley, Berkeley, 1993.
- [36] MARCOS, A.; BALAS, G.J.; Development of linear-parameter-varying models for aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. v.27, n.2, p.218-228, 2004.
- [37] AGUIRRE, L. A.; Introdução à Identificação de Sistemas. Técnicas Lineares e Não Lineares: Teoria e Aplicação. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2015.
- [38] LOFBERG, J.; Yalmip: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE International Conference on Robotics and Automation, p.284-289, 2004.
- [39] EL-MADANY, M. M.; AL-MAJED, M. I.; Quadratic synthesis of active controls for a quarter-car model. *Journal of Vibration and Control*, v.7, n.8, p.1237-1252, 2001.
- [40] PALHARES, R. M.; GONÇALVES, E. N.; Desigualdades matriciais lineares em controles. In: AGUIRRE, L. A. Encyclopédia de automática, controle e automação, São Paulo: Editora Blucher, 2007.
- [41] KARNOPP, D. C.; MARGOLIS, D. L.; ROSENBERG, R. C.; System Dynamics. Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems. John Wiley & Sons, 2012.

## Apêndice A - Coeficientes dos modelos

**Tabela A1** - Coeficientes dos modelos identificados.

	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>M3</b>	<b>M4</b>
1	-3,8899	-3,8875	-1,9650	-1,9657
2	5,7064	5,6979	9,9883e-1	9,9966e-1
3	-3,7426	-3,7329	2,0657e-4	2,4858e-3
4	9,2613e-1	9,2258e-1	1,8604e-4	-2,4850e-3
5	-1,4126e-2	2,4678e-3		
6	1,2122e-1	-7,2040e-3		
7	-1,9795e-1	7,0104e-3		
8	9,0897e-2	-2,2742e-3		

	<b>M5</b>	<b>M6</b>	<b>M7</b>	<b>M8</b>
1	-3,8854	-1,9650	-3,9020	-3,8902
2	-1,6614e-6	-4,2788e-5	5,7371	1,5265e-6
3	5.6915	9.9900e-1	-3,7683	8,0307e-7
4	-3,7266	1,9014e-4	9,3315e-1	5,7055
5	9,2050e-1	2,6350e-4	1,3017e-1	-3,7401
6	4,7693e-2	-1,1792e-4	-3,1863e-1	9,2488e-1
7	-1,0689e-2		2,4856e-1	3,7301e-2
8	2,3814e-3		-6,0094e-2	1,1522e-2
9	-4,4441e-2			1,1000e-2
10	-5,1441e-2			-3,8458e-2
11	3,1428e-2			-1,0157e-2
12	-7,0396e-3			-4,3035e-5
13	4,8188e-2			-3,5744e-2
14	-2,0730e-2			-4,7985e-6
15	4,6544e-3			-5,4108e-7
16				-3,3115e-2
17				-1,3655e-2
18				3,8937e-2
19				3,4275e-2
20				1,2319e-2
21				-1,4199e-2

M9	M10	M11	M12
39		1,4140e-1	
40		-6,5476e-1	
41		1,9229	
42		-27,293	
43		-2,5943	
44		-1,2012e-1	
45		10,132	

Os coeficientes dos modelos apresentados na Tabela A1, encontram-se dispostos conforme a ordem em (7), isto é,  $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ . Como cada coeficiente possui diversos parâmetros, estes encontram-se na sequência apresentada no item 3.2.