



# REVISTA MILITAR de CIÊNCIA e TECNOLOGIA

Versão online: ISSN 2316-4522  
Volume XXXVII - 2º Trimestre de 2020

## ENGENHARIA MILITAR

**Mobilidade,  
Contramobilidade e  
Proteção**

Assessoramento científico-tecnológico do Instituto Militar de Engenharia nas ações de combate à pandemia de Covid-19 – Pág 05

Modelagem matemática para epidemia de COVID-19 no Brasil – Pág 18

Determinação do coeficiente de difusão do metamilizol sódico (dipirona comercial) utilizando método de condutivimetria e monitoramento por micro controlador arduino – Pág 30

Análise de desempenho  $\mathcal{L}_2$  de sistemas lineares a parâmetros variáveis utilizando a transformada Haar no contexto do paradigma de Lyapunov – Pág 39

Geoinformação digital: uso e necessidades no Exército Brasileiro – Pág 51

Eficiência energética de um veículo elétrico – Pág 58

Simulação da dinâmica longitudinal de veículos leves automáticos com diferentes acoplamentos hidrodinâmicos – Pág 75

Preparo de monômeros utilizados na síntese de polímeros a partir da reação de epoxidação em óleos vegetais – Pág 86



# Biblioteca do Exército

Tradição e qualidade em publicações

A Biblioteca do Exército (BIBLIEx) - Casa do Barão de Loreto é uma centenária instituição cultural do Exército Brasileiro que contribui para o provimento, a edição e a difusão de meios bibliográficos necessários ao desenvolvimento e aperfeiçoamento da cultura profissional-militar e geral.

**SEJA NOSSO  
ASSINANTE**

e receba nossos livros  
editados em sua residência.



**Tel.: (21) 2519-5707**

Praça Duque de Caxias, nº 25  
Palácio Duque de Caxias  
Ala Marcílio Dias - 3º Andar  
Centro - CEP 20.221-260  
Rio de Janeiro - RJ



Acesse:

**[www.bibliex.eb.mil.br](http://www.bibliex.eb.mil.br)**







## REVISTA MILITAR DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

COMANDANTE DO EXÉRCITO:

Gen Ex Edson Leal Pujol

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA:

Gen Ex Décio Luís Schons

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO E CULTURA DO EXÉRCITO:

Gen Ex Tomás Miguel Miné Ribeiro Paiva

EDITOR E DIRETOR DA BIBLIEx:

Cel Cav Marco André Leite Ferreira

### CORPO REDATORIAL:

• Presidente: Gen Bda Armando Morado Ferreira • Editor geral: Marcelo de Miranda Reis • Editor executivo: Edison Conde Perez dos Santos • Engenharia Civil, Transportes e Ciências Ambientais: Antônio Carlos Rodrigues Guimarães – IME (SE/2) • Engenharia Nuclear: Sérgio de Oliveira Vellozo – IME (SE/7) • Engenharia Elétrica: Geraldo Magela Pinheiro Gomes – IME (SE/3) • Engenharia Mecânica: André Luiz Tenório Rezende – IME (SE/4) • Ciência dos Materiais: André Ben-Hur da Silva Figueiredo – IME (SE/8) • Ciência da Computação: Paulo Cesar Salgado Vidal – IME (SE/9) • Engenharia de Defesa: Antônio Eduardo Carrilho da Cunha – IME (SE/10) • Química e Engenharia Química: Kátia Regina de Souza – IME (SE/5) • Engenharia Cartográfica: Heloísa Alves Silva Marques – IME (SE/6) • Pesquisa, Desenvolvimento e Inovação: Aderson Campos Passos – IME (SE/9) • Outras áreas: Paulo Henrique Coelho Maranhão – IME (SE/4).

### EDITORES ASSOCIADOS EXTERNOS:

• Dr. André Fenili – Universidade Federal do ABC, Santo André, SP • Dr. Artur Ziviani – Lab. Nacional de Computação Científica (LNCC), Petrópolis, RJ • Dr. Fernando Fachini Filho – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, SP • Dr. José Carlos Costa da Silva Pinto – Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ • Dr. José Carlos Maldonado – Universidade de São Paulo, São Carlos, SP • Dr.ª Júlia Célia Mercedes Strauch – Escola Nacional de Ciências Estatísticas, RJ • Dr. Luiz Pereira Calôba – Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ • Dr. Otto Corrêa Rotunno Filho – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ • Dr. Richard Magdalena Stephan – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ • Dr. Webe João Mansur – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ • Dr. Carlos Alberto Nunes Consenza – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ

### COMPOSIÇÃO:

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA - IME  
Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha - Rio de Janeiro-RJ - CEP 22.290-270 - Tel.: (21) 2546-7115

### PROJETO WEB:

Rubenildo Python de Barros - Website: <http://rmct.ime.cb.br> - Email: [rmct@ime.cb.br](mailto:rmct@ime.cb.br)

### REVISÃO, PROGRAMAÇÃO E DIAGRAMAÇÃO:

Coordenador: Edison Conde Perez dos Santos • Revisores: Giana Elvira de Oliveira Marquês; Suzana Marly da Costa Magalhães • Programador Web: Rubenildo Python de Barros • Diagramador: Luiz Tadeu Carqueija Mota



## REVISTA MILITAR de CIÊNCIA e TECNOLOGIA

REVISTA MILITAR DE CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA - Volume XXXVII  
2º Trimestre de 2020

Direção, edição e distribuição:

BIBLIOTECA DO EXÉRCITO (BIBLIEx)

Palácio Duque de Caxias - Praça D. de Caxias, 25  
3º andar - Ala Marcílio Dias

Centro - Rio de Janeiro-RJ

CEP 20.221-260

Tel.: (21) 2519-5707

Nossa capa:

Homenagem ao Corpo de Engenheiros

Projeto Gráfico: BIBLIEx





Como demonstra o conjunto de temas elencados em artigo especial nesta edição, a COVID-19 foi o alvo de importantes trabalhos conduzidos por pesquisadores do Instituto Militar de Engenharia (IME). Foram construídos painéis de monitoramento e simulações da evolução da doença, como uma ferramenta para o acompanhamento quantitativo da Pandemia com diversas formas de consulta, e cartas temáticas para o acompanhamento espacial da pandemia. Foram realizadas também pesquisas para o desenvolvimento de equipamentos de baixo custo de auxílio à respiração e estudos computacionais de fármacos com potencial para o tratamento adequado da doença.

Tais trabalhos atingiram um elevado grau de interdisciplinaridade, conjugando a colaboração intensa entre as diversas linhas de pesquisa do IME e entre nossos pesquisadores e os de outros órgãos do Sistema de Ciência, Tecnologia e Inovação do Exército e de Instituições de Ensino e Pesquisa Nacionais. Essa interação envolveu ainda ações de entidades de apoio à pesquisa e de agentes colaboradores individuais internos e externos.

Assim, no contexto da Operação COVID-19 desencadeada pelo Ministério da Defesa, tais esforços de pesquisa atingiram resultados que contribuíram para que o IME desempenhasse seu papel de assessoramento científico no enfrentamento a uma pandemia causadora de impactos profundos em nossas vidas e para aumentar a esperança da sociedade em dias melhores.

No entanto, o IME não parou e esta edição apresenta também artigos versando sobre outras temáticas, tais como: modelagem e simulação; eficiência energética e fontes de energia renováveis. Essas áreas são importantes geradoras de tecnologias de emprego dual, essenciais para a indústria de defesa no que tange ao desenvolvimento de novos produtos e ao aperfeiçoamento da qualidade e do desempenho de Sistemas e Materiais de Emprego Militar.

Os diferentes temas abordados nesta edição da Revista Militar de Ciência e Tecnologia retratam a importância de se desenvolver um ambiente de pesquisa básica diversificado e bem integrado, como uma estratégia eficaz para a geração de resultados sólidos e de soluções científico-tecnológicas inovadoras para o fortalecimento da Nação.

*Gen Bda Armando Morado Ferreira*



---

# SUMÁRIO

---

05

- Assessoramento científico-tecnológico do Instituto Militar de Engenharia nas ações de combate à pandemia de COVID-19

*Armando M. Ferreira*

18

- Modelagem matemática para epidemia de COVID-19 no Brasil

*Gabriela Moutinho de Souza Dias e Luiz Henrique da Costa Araújo*

30

- Determinação do coeficiente de difusão do metamazol sódico (dipirona comercial) utilizando método de condutivimetria e monitoramento por micro controlador Arduino

*Dirceu C. S. Júnior, Mathews M. Massardi, Thaynara R. Mendonça, Ricardo A. S. Mendonça, Isabela C. Matosinhos e Antonio M. O. Siqueira*

39

- Análise de desempenho de sistemas lineares a parâmetros variáveis utilizando a transformada haar no contexto do paradigma de Lyapunov

*Ana Catarina Almeida Filizola de Abreu, Patricia Thompson Bandeira e Paulo César Pellanda*

51

- Geoinformação digital: uso e necessidades no Exército Brasileiro

*Álex D. S. Szrajbman e Luciano A. T. Brito*

58

- Eficiência energética de um veículo elétrico

*Gabriel O. F. Briguiet, João P. Q. Caldas, Lucas A. G. Lima e Vitor Santoro Santiago*

75

- Simulação da dinâmica longitudinal de veículos leves automáticos com diferentes acoplamentos hidrodinâmicos

*Igor Lucas Reinaldo, Elias Dias Rossi Lopes, Gustavo Simão Rodrigues e Ricardo Teixeira da Costa Neto*

86

- Preparo de monômeros utilizados na síntese de polímeros a partir da reação de epoxidação em óleos vegetais

*João Gabriel P. Rodrigues e Ricardo P. Weber*

# Assessoramento científico-tecnológico do Instituto Militar de Engenharia nas ações de combate à pandemia de COVID-19

Armando M Ferreira\*

\* Instituto Militar de Engenharia (IME) – Praça Gen. Tibúrcio, 80 – Urca, Rio de Janeiro – RJ, 22290-270

\* armando@ime.eb.br

**RESUMO:** A grave crise de saúde pública mundial causada pela atual pandemia de COVID-19 teve impactos diretos na sociedade brasileira, evidenciando a necessária participação colaborativa de toda a comunidade científica. Neste contexto, o Instituto Militar de Engenharia - IME foi instado a fortalecer suas parcerias e a oferecer sua capacidade imediata de assessoramento, disponibilizando sua vocação para a pesquisa na busca das soluções de engenharia demandadas. Nestes três meses de atuação, os pesquisadores e professores deste Instituto conduziram projetos coparticipativos, muitos dos quais permitiram materializar produtos e soluções que já se encontram em plena utilização por órgãos go-vernamentais de saúde parceiros. A dinâmica do problema vivido estabelece a necessidade de revisões constantes nos temas tratados, assim como a criação de novas pesquisas e a extinção de outras. Este artigo apresenta uma fotografia atual de toda a mobilização do IME e do Sistema de Ciência e Tecnologia da Força para contribuir por soluções de engenharia no combate à Pandemia de COVID-19.

**ABSTRACT:** The serious global public health crisis caused by the current COVID-19 pandemic had direct impacts on Brazilian society, highlighting the necessary collaborative participation of the entire scientific community. In this context, the Military Engineering Institute - IME was urged to strengthen its partnerships and offer its immediate advisory capacity, making its vocation for research available in the search for the required engineering solutions. In these three months of activity, the researchers and professors of this Institute have conducted co-participatory projects, many of which have made it possible to materialize products and solutions that are already in full use by government health agencies partners. The dynamics of the problem experienced establishes the need for constant revisions in the treated themes, as well as the creation of new research and the extinction of others. This article presents a current photograph of the entire mobilization of the IME and the Force Science and Technology System to contribute for engineering solutions to combat the COVID-19 Pandemic.

**PALAVRAS-CHAVE:** COVID-19. Participação do IME.

**KEYWORDS:** COVID-19. IME's contribution.

## 1. Introdução

No contexto do combate ao novo coronavírus (SarsCov2), causador da doença COVID-19, a Organização Mundial de Saúde – OMS estabeleceu os seguintes objetivos principais para os governos locais: ‘detectar, proteger, tratar e reduzir a transmissão’ [0]. Em nível nacional, o Ministério da Saúde publicou o Plano de

Contingência Nacional para Infecção Humana pelo novo Coronavírus COVID-19 COE/SVS/MS [1] e alinhou esforços com o Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações, que por sua vez orientou todos os órgãos de sua estrutura de pesquisa e financiamento que fomentassem, em caráter emergencial, soluções para atender a demanda por tecnologias para o combate

à doença.

Em atenção a essas diretrizes, o Instituto Militar de Engenharia formou imediatamente um grupo de trabalho com o objetivo de listar os temas das Áreas de Concentração e Linhas de Pesquisa vigentes, que possuíam relacionamento direto com os objetivos principais acima citados, relacionando-os aos professores e pesquisadores que atuam nessas áreas de conhecimento.

Diversos editais, publicados pelas agências de fomento nacionais, serviram de orientação geral acerca da identificação das demandas de assessoramento que poderiam ser atendidas pelo IME. Pode-se citar o edital conjunto entre a FINEP e a FAPESP [2], o qual contemplou projetos que visavam *“desenvolver processos e serviços inovadores para que os produtos resultantes das pesquisas anteriores possam ser efetivamente inseridos no mercado em uma situação emergencial”*.

Considerando as informações descritas acima, e alinhado à Diretriz do Comandante do Exército para a Prevenção e Combate à Pandemia de COVID-19 e Manutenção do Nível de Prontidão e Operacionalidade da Força Terrestre [3], foram levantadas as possibilidades de colaboração em assessoramento científico-tecnológico do IME, que efetivamente iam ao encontro das orientações da OMS, MCTIC e MS, e que contribuiriam para sanar as necessidades de conhecimento substanciadas pelos órgãos de fomento governamentais.

Foram exemplos dos assuntos de interesse estabelecidos pelos órgãos de fomento, descritos no Resumo Informativo nº 01 COVID-19 Assessoramento Científico-tecnológico IME, 28/03/2020 [4], como se segue:

- desenvolvimento de melhorias no diagnóstico de COVID19, a exemplo de uso de inteligência artificial para análise de imagens de tomografia computadorizada;

- desenvolvimento de serviços remotos de saúde voltados à expansão do serviço, como diagnóstico, tratamento, prevenção e demais atividades que conduzam à escalabilidade do atendimento;

- criação de soluções digitais para controle, monitoramento e previsão da disseminação do vírus;

- desenvolvimento de ferramentas para redução e prevenção de contágio;

- pesquisa sobre o uso de inteligência artificial e de tecnologias digitais para referenciamento de pacientes e para melhoria da gestão do sistema de saúde; e

- desenvolvimento, melhoria, simplificação e aceleração da produção de Equipamentos de Proteção Individual (EPI) para profissionais da saúde e de outros instrumentos ou equipamentos para proteção e isolamento de pacientes.

As oportunidades de assessoramento descritas acima serviram de orientação inicial para o fortalecimento das capacidades de apoio imediato e emergencial, as quais deram origem aos subgrupos de trabalho cujos temas serão apresentados nos próximos itens deste artigo.

## 2. Subgrupos de assessoramento científico-tecnológico do IME no combate à COVID-19

Foram estabelecidos oito subgrupos de trabalho, formados por professores e pesquisadores deste Instituto e de IES e ICT parceiras de renome, definidos no Relatório Resumido nº 013 COVID-19 assessoramento científico-tecnológico IME, de 24/06/2020 [5]. Algumas instituições governamentais passaram a colaborar com os trabalhos à medida que os resultados começaram a ser divulgados.



## 2.2 Subgrupo de monitoramento de chamadas e editais

O processo de monitoramento de chamadas/editais, divulgação e preparação/submissão de propostas está a cargo da Subdivisão de Pesquisa, Extensão e Inovação - SD/4 e das Seções de Ensino (SE), não tendo demandado recursos humanos/materiais além dos já existentes. As principais atividades desse subgrupo são:

- monitoramento de Chamadas/Editais no Âmbito do Enfrentamento à pandemia;
- divulgação das Chamadas/Editais que encontram aderência às atividades desenvolvidas pelo IME aos pesquisadores;
- centralização dos pedidos de submissão de projetos e realização de procedimentos administrativos de submissão de propostas.

Até a presente data, foram levantados os seguintes Editais cujos conteúdos continham aderência aos trabalhos de pesquisa que estavam sendo realizados no IME:

- Ação Emergencial Projetos para Combater os Efeitos da COVID-19 – Parceria FAPERJ/SES – 2020;

- Desafio COVID-19 – Programa da VALE para financiar soluções para o combate ao COVID-19;

- Edital de Seleção Emergencial I (Edital nº 09) - CAPES voltado para o financiamento de pesquisas para Prevenção e Combate a Surtos, Endemias, Epidemias e Pandemias. Foram submetidos dois projetos a esse edital:

- “Equipamento digital para medir e transmitir on-line a temperatura corporal para diagnosticar sintoma da COVID-19 e permitir o planejamento do controle da epidemia pelos Agentes Públicos”, do Prof Elias SE/8; e

- “Desenvolvimento de Spray de Nanomate-

riais Híbridos de Óxido de Grafeno e Nanopartículas Metálicas para Promoção de Efeito Antimicrobiano Residual para Ação Desinfetante em Vestuários e Superfícies”, do Prof Valdir, da SE/5, em conjunto o TC Wagner, da SE/8.

- Chamada MCTI/CNPq/CT-Saúde/MS/SCTIE/DECIT Nº 07/2020 – Pesquisas para enfrentamento da COVID-19, suas consequências e outras síndromes respiratórias agudas graves;

- Edital de Seleção Emergencial II (Edital nº 11) - Programa Estratégico Emergencial de Combate a Surtos, Endemias, Epidemias e Pandemias - “CAPES - Fármacos e Imunologia”; e

- Edital de Seleção Emergencial III (Edital nº 12) - Programa Estratégico Emergencial de Combate a Surtos, Endemias, Epidemias e Pandemias - “CAPES - Telemedicina e Análise de Dados Médicos”.

Foram iniciadas tratativas para um acordo Acadêmico de Cooperação entre a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (POLI/USP) e o IME para a participação de uma equipe da SE/8, no projeto INSPIRE para a fabricação de respiradores.

## 2.3 Subgrupo de sistemas de monitoramento, modelagem e simulação da epidemia

As atividades deste subgrupo são divididas em quatro escopos:

- Escopo 1: Subsistema de Coleta de Dados;

Foi implementado e posto em funcionamento o subsistema de monitoramento e coleta de dados, a partir das informações divulgadas pelo MS, com frequência de coleta de 30 minutos e estrutura definida pelo CDS, relacionando a dados dos militares do Exército Brasileiro e automatizando o envio das previsões de 15 dias, obtidos pela modelagem matemática da pandemia.

Neste escopo, foi atendida a demanda da UFRJ para desenvolver infraestrutura computacional de coleta de dados, realizada em coparticipação com a Div Tecnol Info Com do Instituto.

- Escopo 2: Apresentação dos Dados;  
Foram desenvolvidos *dashboards* com atualização periódica, conforme exemplo da **figura 1**.

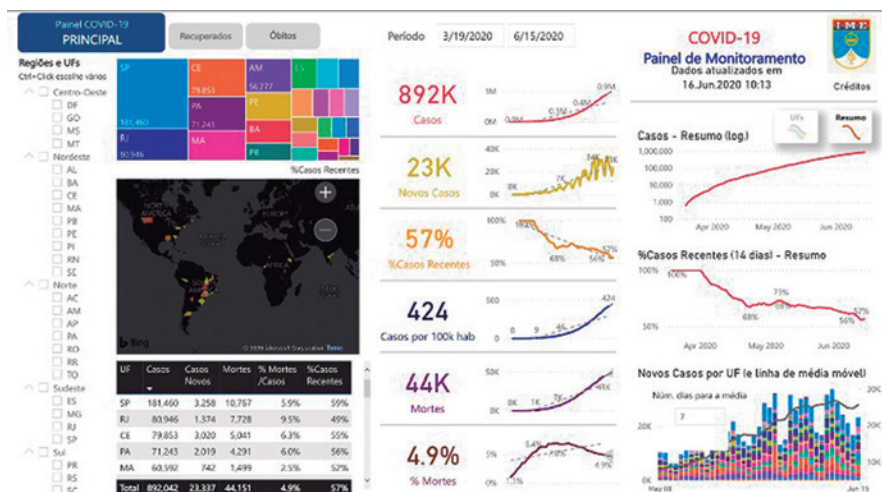


Fig. 1 – Exemplo de dashboard de monitoramento da pandemia, 16Jun20

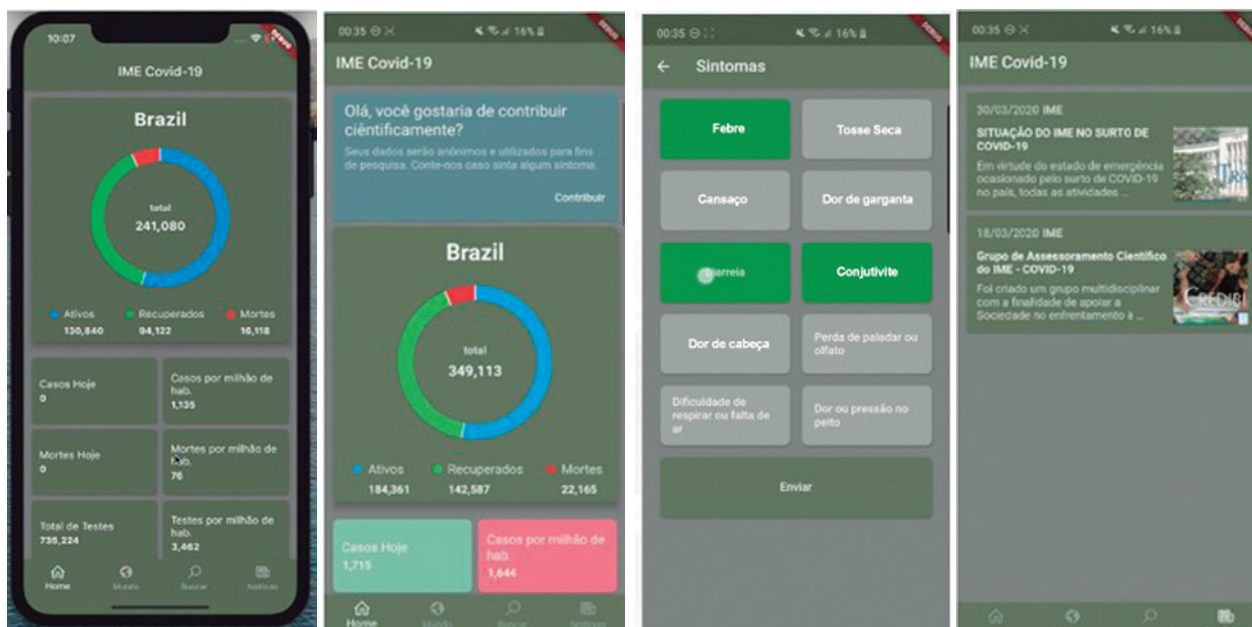
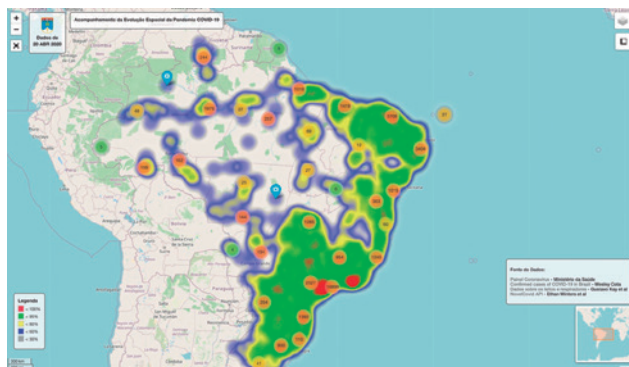


Fig. 3 – Definição do escopo da primeira versão do app, usando o framework Flutter e base de dados NoSQL

Ainda neste escopo, foram desenvolvidos mapas da evolução espacial da pandemia, conforme exemplo da **figura 2**.



**Fig. 2** – Mapa da evolução espacial da pandemia com os dados do MS

#### - Escopo 3: Modelos Epidemiológicos;

Foram desenvolvidos modelos de curto, médio e longo prazos do município do Rio de Janeiro, de militares da ativa do Exército Brasileiro e da população brasileira. Tais modelos permitiram a entrega de relatórios para o *RioSaúde* sobre a pandemia no município do Rio de Janeiro, com os dados de curto prazo (15 e 30 dias), utilizando inclusive informações da rede pública e privada, disponibilizadas por essa empresa de saúde. Para a Força foram entregues relatórios do modelo epidemiológico para o DGP, relativos à prospecção da doença, utilizando os dados fornecidos pelo DGP e pelo CDS.

#### - Escopo 4: Desenvolvimento de app para coleta de dados.

Existem tratativas em andamento com a Prefeitura de Foz do Iguaçu e com o Prof Guilherme Rocha do ITA, essa última visando aproximação e possível parceira com equipe SICE - Sistema de Informação para Controle Epidemiológico.

Oficiais e alunos da SE/3, SE/6 e SE/9 deste

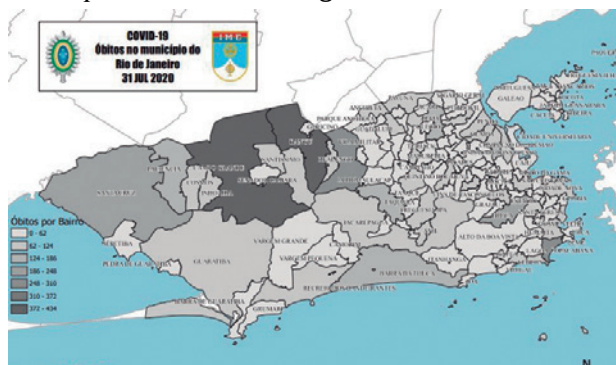
Instituto desenvolveram a versão preliminar do App para coleta de dados, como pode ser visto na **figura 3**.

## 2.3 Subgrupo de sistemas de informações cartográficas

Este subgrupo vem trabalhando com o seguinte escopo:

- Plotagem de dados oficiais em produto em uso pelo CML;
- Adição de dados demográficos do IBGE;
- Adição de dados epidemiológicos da FIOCRUZ;
- Adição de predição de movimento das manchas no mapa de calor;
- P&D de Ferramenta de Auxílio ao Diagnóstico de COVID-19 por Processamento de Imagens de Exames (Ação complementar usando a capacidade técnica do IME em Processamento de Imagens).

Foram gerados Mapas Temáticos sobre os casos de COVID-19, usando dados do IBGE e da Secretaria Estadual de Saúde do Rio de Janeiro, como pode ser visto na **figura 4**.



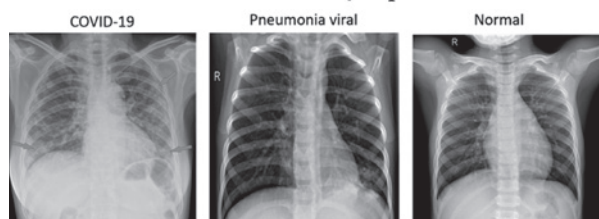
**Fig. 4** – Mapa temático do município do Rio de Janeiro/bairros 21JUN 20

O subgrupo disponibilizou Mapas Temáticos sobre os casos de COVID-19 customizados para



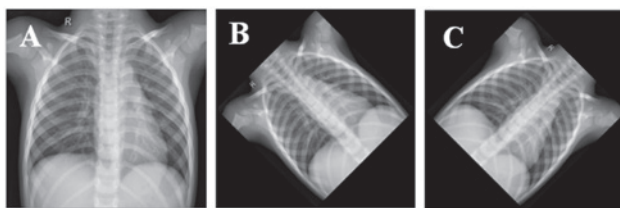
o CML, com informações dos estados de Minas Gerais, Rio de Janeiro e Espírito Santo, tratadas pelo 5º Centro de Geoinformação. Também foram desenvolvidos modelos de predição a serem incorporados nos mapas para disponibilização ao CML.

Por último, foi desenvolvida uma ferramenta de auxílio ao diagnóstico de COVID-19 com processamento de imagens obtidas por tomografia computadorizada e radiografia convencional empregando técnicas de inteligência artificial, uma vez que as Redes Neurais Convolucionais (CNN, do inglês Convolutional Neural Network), são inspiradas no córtex visual humano, sendo, deste modo, pertinente realizar processos de pré-processamento como a aplicação de filtros de convolução na tentativa de realçar os sintomas nos pulmões de pacientes atingidos pela doença. Para tal, foi efetuado o download de imagens de Raio-X do tórax disponíveis publicamente para construção de um banco de dados, composto por 219 imagens de pacientes cujos pulmões foram atingidos por Sars-CoV-2, 1341 imagens de pulmões de pacientes saudáveis, 1345 imagens de pacientes com pulmões comidos por pneumonia viral (figura 5). As imagens serão utilizadas para o treinamento de métodos de aprendizado profundo visando à detecção automática dos sintomas oriundos de infecção pelo COVID-19



**Fig. 5** - Imagens de Raio-X do tórax. As setas apontam para os sintomas causado pela Sars-CoV-2

Visando elevar a acurácia de classificação, será aplicado um procedimento conhecido como *Augmentation* (figura 6) para aumentar artificialmente o número de imagens utilizadas para o treinamento do método.



**Fig. 6** – Aplicação do procedimento Augmentation: (A) original; (B) rotação de 45º à esquerda; e (C) rotação de 45º à direita.

## 2.4 Subgrupo de equipamentos

Tem-se como objetivos deste subgrupo a obtenção de equipamentos de proteção individual (EPI) de baixo custo, bem como de suas peças de reposição, por meio CAE/CAM e de prototipação rápida com impressão 3D.

A figura 7 mostra o lote piloto de protetores faciais entregues ao HCE.



**Fig. 7** – Lote piloto de protetores faciais entregues ao HCE

**Tab. 1** – quantidades de protetores faciais distribuídos por organizações de saúde

HCE	21	-	20	20	20	20	101
H Ge RJ	27	-		20		20	87
H Mil Res	-	-		20		20	40
PMPV	12	-	10		10		32
IME - SSau	11	4					15
PMN	4	-		10		10	24
OCEX	10	-			10		30
IBEx	-	-	20		20		66
38 BI - SSau	-	-			10	10	30
Hosp Mun Salgado Filho	9	-		20			29
Hosp Mun Parelheiros (SP)	12	-					12
Hosp Mun Miguel Couto	92	-		20		20	132
CMS Dom Elder (Botafogo)	10	-					10
Hosp Univ UFC (Fortaleza)	61	-					61
Hosp. Pedro Ernesto	-	-	21		10		31
H U Antonio Pedro UFF (AlumniIME)	-	10					10
Hosp Carlos Chagas (TC Giana)	-	-	20				20
Hosp Est Adão Pereira Nunes(Saracuruna)	-	100					100
Hosp Fed do Andaraí (AlumniIME)	-	-				50	50
UPA Engenho Novo (Charles)	-	-			10		10
UPA Duque de Caxias (Charles)	-	-		10			10
	-	-	-	-	-	-	0
<b>Produção Semanal</b>	<b>269</b>	<b>114</b>	<b>91</b>	<b>120</b>	<b>70</b>	<b>100</b>	<b>900</b>

A **tabela 1** apresenta as quantidades e as organizações de saúde que receberam os protetores faciais distribuídos.

As especificações técnicas e os projetos dos EPI foram entregues à DF para análise da viabilidade de produção em escala.

## 2.5 Subgrupo de estudo de potenciais fármacos

Os estudos de potenciais fármacos foi dividido nas duas fases descritas abaixo:

- Fase 1 – Investigar fármacos em ambiente computacional (*drug design*), para propor potenciais medicamentos contra o COVID-19. Nesta fase foram escolhidos os Alvos do vírus do COVID-19, realizada pesquisa em bases de dados científicos, modeladas as estruturas químicas, docagem

das moléculas e finalmente proposição dos potenciais fármacos. Como resultado, dentre as 22 mil moléculas iniciais, sete foram consideradas promissoras. Existem tratativas em curso para que se iniciem os testes laboratoriais.

- Fase 2 – realizar, com apoio do IBEx, LQFEx, IDQBRN e FioCruz, testes in vitro e in vivo dos medicamentos aprovados na fase 1. Esta fase está em andamento, tendo sido assinado um acordo de confidencialidade com a FioCruz e realizadas tratativas com o LQFEx, IDQBRN.

## 2.6 Subgrupo de logística humanitária

As atividades deste subgrupo foram divididas em dois escopos:

- Escopo 1 – Identificar projetos relevantes para

mitigação da crise que necessitem de apoio para melhoria de seus processos logísticos; e

- Escopo 2: Apoiar no emprego de metodologias científicas para o planejamento e operação logística, incluindo operações de mobilização das Forças Armadas e Logística Humanitária. O objetivo é apoiar por meio de mapeamento de processos, avaliação de custos e de desempenho, estruturação da cadeia de distribuição e solução de problemas de roteirização.

Seguindo estes escopos, foi elaborada uma cartilha (figura 8) com base nas instruções preconizadas pelo referido decreto, a ser divulgada para transportadoras, motoristas e demais atores, por solicitação da Defesa Civil.



**Fig. 8** – Cartilha sobre medidas de higienização para transporte de carga ([http://www.rj.gov.br/NoticiaDetalhe.aspx?id\\_noticia=6043](http://www.rj.gov.br/NoticiaDetalhe.aspx?id_noticia=6043))

Foi redigido artigo sobre os efeitos da pandemia do COVID-19 em cadeias de suprimento (figura 9), onde os autores relatam os impactos diretos nas cadeias de suprimentos e sugerem às empresas algumas medidas para fazerem frente às dificuldades logísticas advindas da pandemia.



**Fig. 9** – Análise sobre os efeitos do COVID-19 em cadeias de suprimento (<https://genexatas.com.br/efeitos-da-pandemia-de-covid-19-em-cadeias-de-suprimentos/>)

Por solicitação da Fiocruz, foi elaborada uma Nota Técnica sobre Adaptação da Capacidade Hospitalar em Resposta à Pandemia por COVID-19 (figuras 10 11), com base nos conceitos de logística humanitária, apresentando recomendações para os fornecedores, secretarias estaduais e para os gerentes hospitalares. As referidas notas técnicas podem ser acessadas no link abaixo.

(<https://portal.fiocruz.br/documento/nota-tecnica-adaptacao-da-capacidade-hospitalar-em-resposta-pandemia-por-covid-19>)





Fig 10 – Disponibilização de Nota Técnica no site da Fiocruz



Fig. 12 – Material Saber Doar (surveymonkey.com/r/SaberDoar)

Por último, este subgrupo realizou um levantamento da demanda por *faceshields* nas OMS da 1ª Região Militar e demais hospitais civis, bem como otimização de rotas para distribuição de componentes necessários para a fabricação dos protetores faciais (figura 13).

Problema de roteirização de veículos com coletas e entregas simultâneas

#### Exemplo: Rota do dia 22/04

1. PIRF: Saída da garagem
2. IMBEL: Coleta de 26 *faceshields*
3. DSUP: Abastecimento viatura
4. Maj Boente: Coleta de Impr. 3D
5. HCE: Entrega de 26 *faceshields*
6. IME: Entrega de Impr. 3D
7. PIRF: Chegada na garagem



Método utilizado: Large Neighbourhood Search (LNS)

Fig. 13 – Coleta de faceshields

#### CONTEXTUALIZAÇÃO

Cerca de três semanas após a confirmação do primeiro caso de infecção pelo novo coronavírus SARS-CoV-2 (causador da COVID-19) no Brasil, o Ministério da Saúde declarou o início da transmissão comunitária no país (Rache et al., 2020). Em função dessa transmissão, o número de casos confirmados vem aumentando exponencialmente e a previsão é de que esta tendência persista pelas próximas semanas. De forma geral, emergências de saúde pública não podem ser evitadas, mas seus efeitos podem ser drasticamente reduzidos por meio da implantação de estruturas eficientes de logística médica de emergência (He e Liu, 2015).

O documento da Organização Mundial da Saúde (OMS) "Ações críticas de preparação, prontidão e resposta para a COVID-19" (OMS, 2020a), publicado em 19 de março, sistematiza quatro cenários de transmissão possíveis, desde o da ausência de casos até o de transmissão comunitária. No Quadro 1 estão sistematizadas as mudanças para a atenção em saúde, bem como para o manejo estratégico de casos.

Fig. 11 – Disponibilização de Nota Técnica no site da Fiocruz

Foi elaborado material denominado "SABER DOAR" (figura 12) que está sendo divulgado em redes sociais, com intuito de reduzir o fenômeno da convergência de materiais, onde há um link e um QRCode para acesso a um questionário que visa entender o padrão de comportamento do doador (surveymonkey.com/r/SaberDoar).

## 2.7 Subgrupo de chamada por soluções e colaborações

Este subgrupo faz uso de abordagens de Empreendedorismo e Inovação praticadas pelo IME e de formação de redes de mobilização pela Alumni IME. Cita-se a iniciativa de apoio à produção de EPIs pela Alumni ilustrada na **figura 14**.



**Fig. 14** – Página da Alumni IME em Apoio ao Projeto de Produção de EPI

Foram selecionados 3 projetos que já estão sendo apoiados pela equipe:

- **Sistema de fila virtual para emergências hospitalares.** Projeto em desenvolvimento pela startup ARCANJO de alunos do 4º ano de computação;

- **Banho de cobre sobre EPI.** Este foi um dos projetos selecionados na *Chamada por Soluções e Contribuições*. Estão sendo desenvolvidas ações em paralelo para fazer os primeiros protótipos, testar a efetividade do material e providenciar a fabricação, contando com a colaboração da SE/5 na prototipação, da AGITEC na busca por patentes sobre o assunto, do IBEx nos testes da efetividade do material e do SENAI nos testes de qualidade e prototipação.

- **Óleo com Nanopartículas Sanitizantes.** Estão sendo desenvolvidas ações para confeccionar os primeiros protótipos, testar a efetividade do material e

providenciar a fabricação. O trabalho de prototipação está sendo feito por startup de Campinas, que possui convênio com o IME e que é de ex-alunos da SE/8. Esse grupo irá apoiar nos testes de efetividade do material junto ao IBEx.

## 2.8 Subgrupo de segurança do trabalho e rede de relacionamentos

O objetivo deste subgrupo é possibilitar que o IME integre as redes científico-tecnológicas de combate ao COVID-19, em especial no âmbito da Engenharia de Segurança do Trabalho, por meio de seu representante junto ao sistema COFEA/CREA.

Ainda no escopo deste subgrupo, foi estabelecida a presença do IME no Comitê Regional de Inspeção do trabalho para Crise – COVID-19, ativado pela Superintendência Regional do Rio de Janeiro, vinculada ao Ministério da Economia. Adicionalmente, estão em curso tratativas com Petrobrás, Amazon e Linx para viabilizar uma plataforma *on line* de gestão de recursos durante a crise.

Foi publicado, em 04 MAIO 20, o artigo IMPRESSORAS 3D DISPONIBILIZAM MÁSCARAS HOSPITALARES (<https://revistapreven.org/05/2020/covid-19/impessoras-3d-disponibilizam-mascaras-hospitalares/>), divulgado na comunidade de engenharia de segurança no trabalho.

## 3. Entregas, continuidade das ações e conclusões

A participação do IME nas ações governamentais para enfrentamento da pandemia de COVID-19 foi inicialmente pensada para se deter ao campo do assessoramento científico-tecnológico, em as-

suntos elencados pelas agências de fomento como sendo emergenciais. Para tanto, foram formados subgrupos de trabalho que reuniam professores e pesquisadores deste Instituto, os quais já desenvolviam, em suas linhas de pesquisa, trabalhos

correlatos aos ora demandados.

Posteriormente, no curso das ações dos diversos subgrupos, e fruto do contato com os já citados Estabelecimentos de Ensino Superior e com os renomados Institutos de Pesquisa nacio-

**Tab. 2 – Principais entregas dos subgrupos**

SUBGRUPO	PRINCIPAIS ENTREGAS
CHAMADAS E EDITAIS	<ul style="list-style-type: none"> <li>Editais divulgados com aderência à pesquisa do IME (até 26/05/20):</li> <li>- Ação Emergencial Projetos para Combater os Efeitos da COVID-19 – Parceria FAPERJ/SES – 2020</li> <li>- Desafio COVID-19 – Programa da VALE para financiar soluções para o combate ao COVID-19. A SE/9, realizou a submissão de um projeto a esse Edital.</li> <li>- Edital de Seleção Emergencial I (Edital nº 09) - CAPES voltado para o financiamento de pesquisas para Prevenção e Combate a Surtos, Endemias, Epidemias e Pandemias. Foram submetidos dois projetos a esse edital:</li> <li>- <i>“Equipamento digital para medir e transmitir on-line a temperatura corporal para diagnosticar sintoma da COVID-19 e permitir o planejamento do controle da epidemia pelos Agentes Públicos”</i>, da SE/8; e</li> <li>- <i>“Desenvolvimento de Spray de Nanomateriais Híbridos de Óxido de Grafeno e Nanopartículas Metálicas para Promoção de Efeito Antimicrobiano Residual para Ação Desinfetante em Vestuários e Superfícies”</i>, da SE/5, em conjunto com a SE/8.</li> <li>- Em 08 ABR 20, divulgou-se a Chamada MCTI/CNPq/CT-Saúde/MS/SCTIE/DECIT Nº 07/2020 – Pesquisas para enfrentamento da COVID-19, suas consequências e outras síndromes respiratórias agudas graves. A SE/8, submeteu um projeto a esse Edital MCTI-CFINEP-COVID19 01-2020.</li> <li>- Edital de Seleção Emergencial II (Edital nº 11) - Programa Estratégico Emergencial de Combate a Surtos, Endemias, Epidemias e Pandemias - “CAPES - Fármacos e Imunologia” – Foram submetidos dois projetos a esse edital: um da SE/8 e da SE/5 em conjunto com a SE/8.</li> <li>- Edital de Seleção Emergencial III (Edital nº 12) Programa Estratégico Emergencial de Combate a Surtos, Endemias, Epidemias e Pandemias - “CAPES Telemedicina e Análise de Dados Médicos”.</li> </ul>
MONITORAMENTO, MODELAGEM E SIMULAÇÃO	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Protótipo de visualização do monitoramento com a possibilidade de inserção de mais camadas de estatísticas para melhoria das estimativas de cenários futuros;</li> <li>- Parceria com o RIOSAÚDE, órgão da prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro, que permitiu obter dados sobre a Covid19 e sobre SARS das redes privada e pública no Rio de Janeiro;</li> <li>- Modelo epidemiológico pronto;</li> <li>- Artigo científico sobre estudo de curto prazo pronto e já disponibilizado para a RIOSAÚDE (disponível no portal);</li> <li>- Artigo científico sobre estudo de curto, médio e longo prazos disponibilizados ao Cmdo do IME;</li> <li>- Implementado e posto em produção sistema de monitoramento dos dados do MS, com frequência de coleta de 30 minutos.</li> <li>- Implementado processo automatizado de envio das previsões de 15 dias da modelagem matemática para uso do CDS.</li> <li>- Atendida demanda da UFRJ para desenvolver outra infraestrutura computacional de coleta de dados.</li> <li>- Atualização do dashboard em ferramentas e uso dos dados oriundos do pesquisador Wesley Cotta</li> <li>- Dashboard com os dados do MS;</li> <li>- Mapa da evolução espacial da pandemia com os dados do MS;</li> <li>- Animação com a evolução da pandemia; e</li> <li>- Primeira versão do app, usando o framework Flutter e base de dados NoSQL.</li> </ul>
SISTEMA DE INFORMAÇÕES CARTOGRÁFICAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mapas temáticos, usando dados do IBGE e Secretaria Estadual de Saúde do Rio de Janeiro, abrangendo a cidade do Rio de Janeiro, com divisão por bairros;</li> <li>- Mapas de casos confirmados e de óbitos por covid-19 disponibilizado ao CML;</li> <li>- Incorporação das séries históricas de Espírito Santo, Rio de Janeiro e Minas Gerais; e</li> <li>- Ferramenta de Auxílio ao Diagnóstico de COVID-19 com processamento de Imagens obtidas por Tomografia Computadorizada e Radiografia Convencional empregando técnicas de Inteligência Artificial e procedimento conhecido como Augmentation para aumentar artificialmente o número de imagens utilizadas para o treinamento do método.</li> </ul>
EQUIPAMENTOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lote Piloto de 20 (vinte) protetores faciais entregue para testes no HCE;</li> <li>- Lote parcial de mais 25 (vinte e cinco) protetores entregues em 31Mar20: 08 na PMPV, 08 no HGeRJ (Vila Militar), 04 na PMN (Niterói) e 05 na Seção de Saúde do IME; e</li> <li>- Produção de 900 protetores faciais entregues até 21 de Maio de 2020.</li> </ul>
ESTUDO COMPUTACIONAL DE POTENCIAIS FÁRMACOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>- As estruturas químicas foram todas modeladas;</li> <li>- Estudo de docagem das moléculas;</li> <li>- Dentre as 22mil moléculas iniciais, sete foram consideradas promissoras. Tratativas em curso para que se iniciem os testes laboratoriais.</li> </ul>



SUBGRUPO	PRINCIPAIS ENTREGAS
LOGÍSTICA HUMANITÁRIA	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elaboração de proposta de revisão do decreto estadual sobre cuidados com manuseio e transporte de carga durante epidemia do Coronavírus por solicitação da Defesa Civil;</li> <li>- Cartilha com base nas instruções preconizadas pelo referido decreto, divulgada para transportadoras, motoristas e demais atores, por solicitação da Defesa Civil.</li> <li>- Cartilha sobre medidas de higienização para transporte de carga, disponibilizada em <a href="http://www.rj.gov.br/NoticiaDetalhe.aspx?id_noticia=6043">http://www.rj.gov.br/NoticiaDetalhe.aspx?id_noticia=6043</a>;</li> <li>- Análise sobre os efeitos do COVID-19 em cadeias de suprimento, disponível em <a href="https://genexatas.com.br/efeitos-da-pandemia-de-covid-19-em-cadeias-de-suprimentos/">https://genexatas.com.br/efeitos-da-pandemia-de-covid-19-em-cadeias-de-suprimentos/</a>;</li> <li>- Nota Técnica sobre adaptação da capacidade hospitalar em resposta à pandemia por Covid19 (solicitação da Fiocruz); e</li> <li>- Elaboração de material para conscientização sobre doações denominado SABER DOAR, com divulgação por <a href="https://surveyMonkey.com/r/SaberDoar">surveyMonkey.com/r/SaberDoar</a></li> </ul>
CHAMADA POR SOLUÇÕES E COLABORAÇÕES	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Apoio na fabricação de protetores faciais - a Alumni IME captou R\$ 9.725,23 reais para aquisição de insumos;</li> <li>- Sistema de fila virtual para emergências hospitalares;</li> <li>- Banho de cobre sobre EPI. Foram preparadas amostras com 3 técnicas diferentes e enviadas para análise no CTEx.</li> </ul>
SEGURANÇA DO TRABALHO E REDE DE RELACIONAMENTOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tratativas, nível DCT e MD, com a Petrobrás, Amazon e Linx para viabilizar uma plataforma online para gestão de recursos durante a crise, a ser oferecida ao MD;</li> <li>- Estabelecida presença do IME no Comitê Regional de Inspeção do trabalho para Crise – COVID-19, ativado pela Superintendência Regional do Rio de Janeiro, vinculada ao Ministério da Economia;</li> <li>- Publicado o artigo Impressoras 3d disponibilizam máscaras hospitalares. <a href="https://revistapreven.org/05/2020/covid-19/impressoras-3d-disponibilizam-mascaras-hospitales/">https://revistapreven.org/05/2020/covid-19/impressoras-3d-disponibilizam-mascaras-hospitales/</a></li> </ul>

nais, foram sendo identificadas possibilidades de estudos e trabalhos em conjunto, culminando com as entregas da **tabela 2**.

Analizando as entregas descritas na **tabela 2**, percebe-se uma grande quantidade de interações do IME com diversas entidades governamentais, nos âmbitos federal, estadual e municipal. Tais parcerias, não só potencializaram os resultados positivos do trabalho, com imprimiram uma direção comum no sentido de unir esforços para atender às demandas da sociedade relativas à pandemia de COVID-19.

Ainda sobre o descrito na **tabela 2**, pode-se afirmar que poucos temas de estudo foram descontinuados, e que diversos outros prosperaram e se ramificaram, permitindo as supracitadas entregas, cujos benefícios à Força e à sociedade em geral são de difícil mensuração, mas certamente trarão muitos frutos positivos.

O caráter contínuo das ações de combate e mitigação dos efeitos da pandemia de COVID-19 torna

este artigo uma prestação de contas intermediária e provisória dos esforços do IME em contribuir com suas capacidades aos diversos atores de nossa sociedade.

Certamente o assessoramento científico-tecnológico ora relatado continuará a evoluir com o estabelecimento de novos contatos e parcerias, com a continuidade da pesquisa em curso e com novos resultados das análises em andamento, porém, já é possível afirmar que o Instituto Militar de Engenharia contribuiu e continuará contribuindo com toda a sociedade brasileira, neste momento de crise, de forma inequívoca e valorosa, reafirmando sua histórica tradição de estar presente nos momentos desafiadores como o vivido na atualidade.

Cabe um agradecimento especial a toda equipe deste Instituto envolvida na pesquisa aqui apresentada. A dedicação abnegada de todos permitiu alcançar este valoroso conjunto de resultados.

## Referências bibliográficas

- [1] WHO Director-General's opening remarks at the media briefing on COVID-19 - 11March2020 <https://www.who.int/dg/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11/03/2020>
- [2] Plano de Contingência Nacional para Infecção Humana pelo novo Coronavírus COVID-19 10 COE/SVS/MS | Fev. 2020;
- [3] Edital de Pesquisa para o Desenvolvimento de Tecnologias para Produtos, Serviços e Processos para o Combate à Doença por Corona Virus 2019 (COVID-19) <http://www.fapesp.br/14087>;
- [4] Diretriz do Comandante do Exército para a Prevenção e Combate à Pandemia de COVID-19 e Manutenção do Nível de Prontidão e Operacionalidade da Força Terrestre
- [5] Resumo Informativo nº 01 COVID-19 Assessoramento Científico-tecnológico IME, de 28 /03/2020; e
- [6] Relatório Resumido nº 013 COVID-19 Assessoramento Científico-tecnológico IME, de 24/06/2020.

# Modelagem matemática para epidemia de COVID-19 no Brasil

Gabriela Moutinho de Souza Dias<sup>\*a</sup> e Luiz Henrique da Costa Araújo<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Instituto Militar de Engenharia (IME) – Praça Gen. Tibúrcio, 80 – Urca, Rio de Janeiro – RJ, 22290-270

\* gabriela@ime.cb.br

**RESUMO:** Este artigo apresenta uma modelagem matemática para a epidemia de COVID-19 na população brasileira e um método para a obtenção de estimativas dos parâmetros do modelo. Para tal, foi utilizado como base o modelo matemático epidemiológico SIRD que permite acompanhar o desenvolvimento da doença e fazer projeções da evolução da epidemia. Resultados iniciais validados, com projeções de curto prazo, são apresentados. O presente estudo encontra-se em andamento, em constante atualização e aprimoramento, uma vez que foi desenvolvido durante o curso da epidemia.

**PALAVRAS-CHAVE:** covid-19, epidemia, pandemia, modelo matemático, SIRD.

**ABSTRACT:** This article presents a mathematical model for the covid-19 epidemic in the Brazilian population and a method to obtain estimates of the model parameters. To this end, the epidemiological mathematical model SIRD was used as a basis, which allows to monitor the evolution of the disease and to produce its projection. Initial results, with short-term projections, are presented. The current study is in progress, being constantly updated and improved once it was developed during the course of the epidemic.

**KEYWORDS:** covid-19, epidemic, pandemic, mathematical model, SIRD.

## 1. Introdução

No final do ano de 2019, o mundo acendeu um sinal de alerta com o início de uma nova doença infecciosa viral chamada COVID-19 (*Coronavirus Disease 2019*), causada por um vírus chamado coronavírus SARS-CoV-2 (*Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 of the Genus Betacoronavirus*) [1].

Conforme a epidemia foi se desenvolvendo no mundo, as autoridades médicas mundiais perceberam a rápida disseminação da doença e o seu potencial perigo para o colapso dos Sistemas de Saúde dos países afetados. A comunidade científica, então, se mobilizou em prol de buscar soluções para conter o avanço da doença. Os pesquisadores da área de modelagem e simulação, ao redor do mundo, têm envidado

esforços para buscar modelar a evolução da epidemia [2-5].

A modelagem matemática epidemiológica é bastante eficiente no auxílio do processo de tomada de decisões. A aplicação de modelos analíticos na análise do desenvolvimento de epidemias pode representar importante ferramenta para decisores, permitindo a análise equilibrada e embasada do impacto da epidemia na saúde, na economia, além de entre outras áreas da sociedade. Por essa razão, faz-se mister o desenvolvimento desses modelos objetivando fornecer embasamento para decisões acertadas.

Desde o surgimento do surto de COVID-19, diversos trabalhos científicos foram publicados com o objetivo de analisar o comportamento da epidemia na população [2-5].

Existem basicamente duas formas de anali-

sar esse tipo de fenômeno, por meio de modelos analíticos ou por meio de modelos de simulação computacional. O presente trabalho está inserido na classe de modelos analíticos.

Apesar de haver diversos estudos já divulgados versando sobre a evolução da epidemia e a comparação entre possíveis cenários, cada estudo é direcionado para um país específico. Tendo em vista que cada país tem suas peculiaridades e particularidades locais, é importante que haja um estudo especificamente focado na população brasileira.

Alguns trabalhos direcionados para o cenário específico da população do Brasil já foram divulgados [2,3]. O presente trabalho apresenta contribuições em relação aos anteriores, tendo em vista que os dados utilizados para obtenção dos resultados desta modelagem foram atualizados até a data de 10 de abril de 2020. Os primeiros resultados do presente estudo foram apresentados em [6]. Além disso, o método de estimação dos parâmetros do modelo adequa-se à característica dos dados reais disponibilizados até a escrita deste texto considerando o total de casos acumulado, como explicado na Seção 3 adiante. A constante atualização dos parâmetros e revisão da metodologia para estimá-los são de extrema importância para se obter resultados com maior acurácia e mais próximos da real situação da epidemia.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 é apresentado o modelo *SIDR* (*Susceptible-Infected-Deceased-Removed*) aplicado nesta modelagem e uma análise teórica de dois cenários fictícios. A Seção 3 apresenta a metodologia utilizada para estimação dos parâmetros e a Seção 4, os resultados obtidos com este estudo. As principais conclusões do trabalho até a data de sua atualização do mesmo são apresentadas na Seção 5.

## 2. Modelos epidemiológicos

A modelagem matemática da propagação de doenças infecciosas começou por volta de 1760, com o trabalho de Daniel Bernoulli sobre a varíola. Em 1906, William Hamer foi o primeiro a prever o princípio da Lei de Ação das Massas para um modelo determinístico em tempo discreto [7]. Esse princípio, que incorpora o princípio da mistura homogênea, tem sido a base dos trabalhos subsequentes na área de epidemiologia matemática.

Desde então, diversos modelos matemáticos foram propostos para os mais diversos tipos de doenças infecciosas que afetam a população humana, seja em nível comunitário (epidemia local) ou mundial (pandemia), como a que o mundo enfrenta atualmente com a COVID-19.

O objetivo da modelagem matemática epidemiológica é analisar o comportamento e a evolução de uma doença dentre indivíduos de uma população ao longo do tempo. Essa análise tem o propósito de auxiliar no controle da propagação da doença, de modo a evitar o avanço de epidemias.

A literatura dessa área é bastante rica, principalmente por ser um assunto antigo e amplamente estudado. Existe uma grande quantidade de referências de trabalhos sobre modelos matemáticos para doenças infecciosas [8-16].

Dentre os diversos modelos existentes na literatura, para a modelagem descrita neste documento foi escolhido o modelo *SIDR*. Os principais motivos para tal escolha são a baixa complexidade e a eficiência do modelo. Em termos matemáticos, o modelo é relativamente simples, se comparado a outros modelos da área, pois trata-se de um sistema de equações diferenciais. Em termos



de eficiência, esse modelo já foi utilizado para modelar diversas doenças virais infecciosas no passado [17], mostrando-se altamente eficiente na estimação do andamento da epidemia na população, quando suas condições de aplicabilidade são satisfeitas.

O grande desafio em se trabalhar com modelos epidemiológicos é a estimação dos parâmetros. Essa etapa é de crucial importância, pois pequenas variações nos parâmetros são capazes de causar um grande impacto nos resultados finais.

É importante ressaltar que, independente do método de estimação utilizado, um bom resultado só pode ser obtido se houver uma quantidade adequada de dados acerca da população e do comportamento da doença nos indivíduos em particular e na população como um todo.

## 2.1 Modelo SIDR

Esta seção apresenta o modelo SIDR utilizado no presente trabalho, com destaque para as principais características do mesmo.

Em 1927, Kermack e McKendrick desenvolveram o clássico modelo SIR (*Susceptible-Infected-Removed*) para a propagação de doenças infecciosas [18,19]. Trata-se de um modelo determinístico de tempo contínuo, amplamente utilizado tanto na área epidemiológica quanto em outras áreas da ciência [20,21]. A partir do modelo SIR, diversas extensões foram propostas ao longo do tempo. Em termos gerais, esse modelo divide a população em três compartimentos: Suscetível, Infectado e Removido. O número de óbitos devido à doença está inserido no compartimento Removido. Porém, quando se torna relevante observar separadamente a evolução dos casos de óbitos, torna-se necessário criar um quarto compartimento, específico para tais casos.

A literatura, em geral, se refere a esse compartimento como *Deceased*, e neste trabalho o modelo que inclui tal compartimento é chamado de SIDR (*Susceptible-Infected-Deceased-Removed*).<sup>1</sup>

Seja  $N$  o número total de indivíduos na população. Considera-se que a população é distribuída de forma homogênea na região. Além disso, o modelo também considera uma população homogênea, isto é, todos os indivíduos possuem mesma probabilidade de serem infectados e as taxas de contato de cada indivíduo são iguais. A consideração de homogeneidade é válida para grandes populações, no âmbito da análise da modelagem.

Considere que o período de tempo em que uma epidemia ocorre seja muito menor que o tempo de existência da população, ou seja, o tamanho dessa pode ser considerado constante no período, e os nascimentos e mortes não relacionadas à doença podem ser ignorados. A qualquer instante de tempo, cada indivíduo encontra-se em um determinado estado com relação à doença, dividindo a população em quatro compartimentos:

- S - Suscetíveis: Indivíduos que estão suscetíveis a serem infectados;
- I - Infectados: Indivíduos que estão infectados com a doença e são capazes de transmiti-la a indivíduos suscetíveis;
- D - Óbitos: Indivíduos que morreram devido à doença<sup>2</sup>; e
- R - Removidos: Indivíduos que se recuperaram da doença ou foram isolados, não sendo capazes de transmitir a doença a outros indivíduos.

A transmissão da doença ocorre por contato

<sup>1</sup> Alguns autores se referem a este modelo como SIRD ou SIR com mortalidade induzida.

<sup>2</sup> Utiliza-se a letra D para este compartimento para acompanhar a notação da literatura, do inglês Deceased.

entre os indivíduos<sup>3</sup>. Um indivíduo suscetível se torna infectado após contato com um indivíduo infectado. O termo contato deve ser interpretado de forma ampla, pois refere-se ao evento responsável pela transmissão do vírus, podendo ser um contato físico propriamente dito (como aperto de mãos ou a proximidade física no momento de espirro ou tosse do infectado) ou outro tipo de situação de transmissão, como quando um suscetível tem contato com um local contaminado pelo vírus, por exemplo. O compartimento R engloba os indivíduos que já foram infectados mas não podem mais transmitir a doença. Considera-se que um indivíduo que se recupera da doença torna-se imune durante o período de duração da epidemia, não retornando ao compartimento S, mas sim sendo contabilizado no compartimento R. Indivíduos infectados que são isolados do contato com indivíduos suscetíveis (não sendo assim capazes de transmitir a doença) também são inseridos no compartimento R.

Sejam  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $D(t)$  e  $R(t)$  o número de Suscetíveis, Infectados, Óbitos e Removidos, respectivamente, a cada instante de tempo  $t \geq 0$ . Assim, para todo  $t \geq 0$ , temos que:

$$S(t) + I(t) + D(t) + R(t) = N \quad (1)$$

A evolução do processo infeccioso de acordo com o modelo SIDR é definida pelo seguinte sistema de equações diferenciais [22]:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \frac{\gamma}{1-\rho} I(t) \quad (3)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{\rho}{1-\rho} \gamma I(t) \quad (4)$$

<sup>3</sup>Na literatura, há outros modelos para tipos de doença não transmissíveis por contato direto entre indivíduos, como a dengue, por exemplo.

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (5)$$

Condição inicial:  $(S(0), I(0), D(0), R(0)) = (S_0, I_0, 0, 0)$ ,  $S_0, I_0 > 0$ .  $\beta, \gamma, > 0$ .

O parâmetro  $\beta$  é o **parâmetro de infecção** do processo. Sendo a doença transmitida por contato,  $\beta$  corresponde à taxa com que ocorrem contatos entre dois indivíduos quaisquer, isto é, o número de contatos entre dois indivíduos quaisquer por unidade de tempo. Muitos autores também se referem a  $\beta$  como “taxa de contato”, porém esse termo pode se confundir com a taxa de contato de cada indivíduo, isto é, número de contatos que um indivíduo faz com outros indivíduos na população por unidade de tempo. A **taxa de contato** de cada indivíduo é comumente representada na literatura como  $\alpha$ . A relação entre  $\alpha$  e  $\beta$  é dada por  $\alpha = (N - 1)\beta$ , podendo ser aproximada por  $N\beta$  quando  $N$  é grande.

O parâmetro  $\gamma$  é chamado **taxa de recuperação**, e representa a taxa com que um indivíduo infectado é recuperado (taxa de recuperação por indivíduo infectado).

O parâmetro  $\rho$  é chamado **probabilidade de mortalidade**, isto é, a probabilidade de um indivíduo infectado morrer devido à doença antes de se recuperar.

Na análise da evolução de uma epidemia, há duas importantes métricas de interesse: o **número de reprodutibilidade basal**  $R_0$  (*basic reproduction number*, em inglês<sup>4</sup>) e a **taxa de infecção** (*infection rate*, em inglês).

O número  $R_0$  representa o número médio (valor esperado) de casos secundários provenientes por um indivíduo infectado introduzido em uma

<sup>4</sup> Outras denominações: *basic reproduction ratio*, *basic reproductive number*, *basic reproductive ratio*.

população de indivíduos suscetíveis [23]. Esse conceito é válido para qualquer modelo epidemiológico, porém sua definição matemática depende do modelo específico e de seus parâmetros. No caso do modelo SIDR,  $R_0$  é dado pela razão  $\alpha(1 - \gamma)/\gamma$  [2].

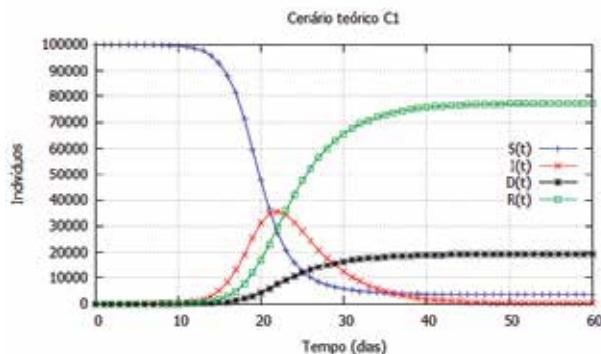
A infecção dos indivíduos suscetíveis, levando à transição para o compartimento Infectados, é chamada na literatura de incidência horizontal (incidência vertical é a variação devido a nascimentos e/ou mortes não relacionados à doença). A incidência horizontal é a taxa de infecção de indivíduos suscetíveis por meio do contato desses com indivíduos infectados [14, 15]. A taxa de infecção varia ao longo do tempo e é dada por  $\beta S(t)I(t)$ .

## 2.2 Análise de longo prazo em dois cenários fictícios

A seguir, são apresentados resultados da modelagem para as variáveis  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $D(t)$  e  $R(t)$ , com valores fictícios para os parâmetros  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$ . O objetivo desta apresentação é explicar como o modelo prevê a evolução de uma epidemia em uma população, e como é o comportamento das curvas das variáveis envolvidas.

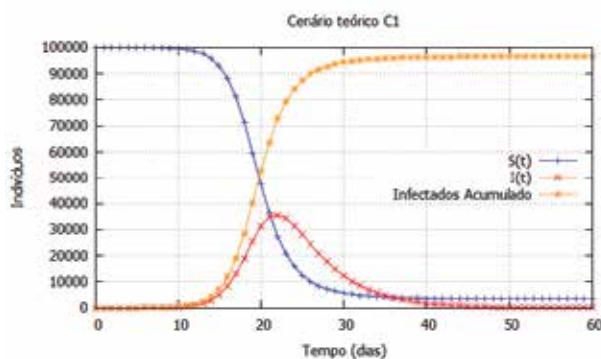
Considere uma população com  $N = 100$  mil indivíduos, e que os parâmetros do modelo são dados por (em  $\text{dia}^{-1}$ ):  $\beta = 0,8$ ;  $\gamma = 0,183$ ;  $\rho = 0,2$ . O número  $R_0$  para esses parâmetros é de aproximadamente 3,5. Considere que em  $t = 0$ , a condição inicial é dada por  $(S(0), I(0), D(0), R(0)) = (N - 1, 1, 0, 0)$ . Vamos chamar esse cenário de C1.

A **figura 1** apresenta a evolução das variáveis  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $D(t)$  e  $R(t)$  para o cenário C1. Podemos observar que o número de infectados aumenta até atingir um pico e depois decai. O processo converge para um período de estabilidade após um certo tempo.



**Fig. 1** –  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $D(t)$  e  $R(t)$  para o cenário C1.

A **figura 2** apresenta a evolução das variáveis  $S(t)$ ,  $I(t)$  e o número de infectados acumulado ao longo do tempo. Essa variável é obtida pela diferença  $N - S(t)$  ou pela soma  $I(t) + D(t) + R(t)$ , ou seja, representa todos os indivíduos que foram acometidos pela doença, distribuídos entre os compartimentos I, D e R. Cabe observar a diferença em se analisar  $I(t)$  e o número de Infectados Acumulados. Nesse cenário fictício quase toda a população foi acometida pela doença.

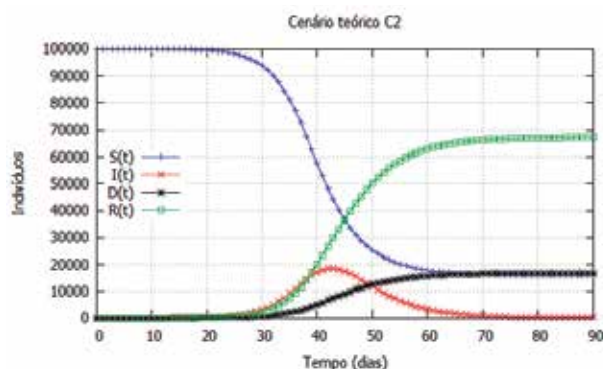


**Fig. 2** –  $S(t)$ ,  $I(t)$  e Infectados Acumulados para o cenário C1.

Vamos observar a seguir o que acontece quando o parâmetro de infecção é menor do que no cenário anterior, mantendo-se as demais condições e parâmetros. Sendo assim, vamos supor

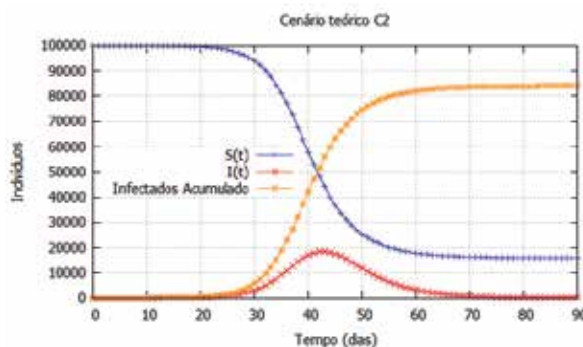
agora que os parâmetros do modelo são dados por (em  $\text{dia}^{-1}$ ):  $\beta = 0,5$ ;  $\gamma = 0,183$ ;  $\delta = 0,2$ . O número  $R_0$  para esses parâmetros é de aproximadamente 2,18. Considere que em  $t = 0$ , a condição inicial é dada por  $(S(0), I(0), D(0), R(0)) = (N - 1, 1, 0, 0)$ , igual a C1. Vamos chamar esse cenário de C2.

A **figura 3** apresenta a evolução das variáveis  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $D(t)$  e  $R(t)$  para o cenário C2. Podemos observar que, apesar de ambos os cenários apresentarem o mesmo comportamento em termos de evolução das curvas, o pico no número de infectados é menor do que em C1. Além disso, tal pico leva mais tempo para ocorrer (em C2 ocorre após 40 dias, enquanto que em C1 ocorre próximo a 20 dias a contar do início do processo).



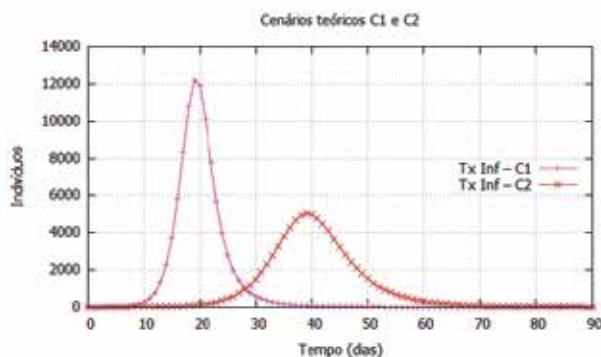
**Fig. 3** –  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $D(t)$  e  $R(t)$  para o cenário C2.

A **figura 4** apresenta a evolução das variáveis  $S(t)$ ,  $I(t)$ , e o número de Infectados Acumulados ao longo do tempo para o cenário C2. Em comparação ao cenário anterior, pode-se observar que uma parcela menor da população é acometida pela doença.



**Fig. 4** –  $S(t)$ ,  $I(t)$  e Infectados Acumulados para o cenário C2.

Para finalizar essa apresentação teórica, a **figura 5** apresenta a taxa de infecção ao longo do tempo para os cenários C1 e C2.



**Fig. 5** – Taxa de infecção para os cenários C1 e C2.

Pode-se observar na comparação entre os cenários C1 e C2 a influência de medidas de controle de propagação da doença na população. Tais medidas são capazes de reduzir o parâmetro de infecção  $\beta$ . Quanto maior o parâmetro de infecção, maior a taxa com que indivíduos suscetíveis tornam-se infectados, como no cenário C1. O cenário C2 representa uma situação em que ocorre a adoção de medidas de controle. A medida de isolamento social, por exemplo, é uma medida de controle pois reduz o número de contatos entre os indivíduos de forma geral, e, con-



sequentemente, reduz o número de contatos entre suscetíveis e infectados. Por isso, medidas de controle de propagação são capazes de atrasar a evolução da epidemia, além de reduzir o número de infectados total.

É importante ressaltar que a comparação apresentada é teórica e objetiva, com base simplesmente no resultado matemático que o modelo apresenta. Este estudo não tem o objetivo de analisar impactos econômicos ou sociais de qualquer medida adotada pelas autoridades governamentais, e tão pouco reflete a opinião pessoal dos autores acerca da adoção ou não de qualquer medida. Cabe destacar que este tipo de comparação entre possíveis cenários, considerando a aplicação ou não de medidas de controle, é realizado na grande maioria dos trabalhos que tratam da análise de propagação de doenças infecciosas publicados na literatura há mais de cem anos, tanto em artigos científicos como em livros [9, 12].

### 3. Metodologia para estimação dos parâmetros

Como mencionado anteriormente, o desafio da modelagem epidemiológica é a estimação dos parâmetros. Nesta seção é apresentada a metodologia de estimação utilizada neste trabalho.

Os parâmetros do modelo que precisam ser estimados são  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$ . Um dos métodos de estimação mais utilizados na literatura é a minimização do erro médio quadrático para as variáveis  $I(t)$  e  $D(t)$ , como proposto em [9, 12], por exemplo.

Entretanto, os dados reais oficialmente divulgados pelo Ministério da Saúde do Brasil<sup>5</sup> referem-se a: número de casos (infectados) diário (casos novos por dia), número de casos (infectados)

acumulado ao longo do tempo, número de óbitos por dia e número de óbitos acumulado ao longo do tempo. Sendo assim, não há dados oficiais para se inferir com acurácia o número de indivíduos infectados no dia  $t$ . Quando se analisa um período curto da epidemia, como na obtenção dos resultados preliminares apresentados em [6], pode-se considerar que o número de infectados é igual ao número acumulado de infectados ao longo do tempo, retirando apenas os óbitos e considerando que nenhum infectado foi removido. Porém, quando analisamos um período maior do que o tempo médio previsto para um infectado sair desse estado (por meio de recuperação ou morte ou isolamento, por exemplo), esses dois valores não mais correspondem.

Sendo assim, devido a essa restrição na obtenção de dados reais para comparação e ajuste, neste trabalho o método utilizado para estimar os parâmetros  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$  do modelo, é a minimização do erro médio quadrático para as variáveis  $CI(t)$  e  $D(t)$ , onde  $CI(t)$  representa o número acumulado de infectados no período de tempo de zero a  $t$ . O objetivo é minimizar a seguinte expressão para o erro  $e_n$ :

$$e_n = \frac{1}{2} \left( \sum_{t=t_0}^{t_0+n} (CI_t - \hat{CI}_t)^2 + \sum_t (D_t - \hat{D}_t)^2 \right) \quad (6)$$

onde  $\hat{CI}_t$ ,  $\hat{D}_t$  são os valores estimados para os valores reais  $CI_t$ ,  $D_t$ , respectivamente, no tempo  $t$ . O erro  $e_n$  é obtido considerando um conjunto de dados de tamanho  $n + 1$ , ou seja, correspondendo a  $n + 1$  valores das variáveis, a partir do tempo  $t_0$ .

É importante ressaltar que o valor do erro  $e_n$  e o resultado do processo de minimização dependem fortemente da quantidade e da qualidade dos dados reais disponíveis. A estimação dos

<sup>5</sup>Disponível em <https://covid.saude.gov.br/>. Acesso em 10/04/2020.

parâmetros deve ser atualizada constantemente, e os valores obtidos dependem dos dados reais que serão usados na comparação com o resultado da modelagem. Quanto mais fidedignos e mais próximos à realidade da situação da epidemia forem os dados de entrada, melhor e mais ajustado será o resultado da modelagem em termos de projeções futuras. Cabe ressaltar que um bom ajuste do modelo aos dados reais não garante uma boa projeção da evolução futura. Um bom ajuste está relacionado ao processo de validação da modelagem. Porém, para que a modelagem, mesmo que validada, seja capaz de fornecer uma projeção futura que seja próxima à realidade, os dados de entrada (contabilização de casos reais) devem ser os mais fiéis possíveis. No curso deste estudo, o chamado “isolamento social” foi uma medida de controle exógena adotada com o objetivo de reduzir a propagação da doença na população. Um dos objetivos deste trabalho é fornecer projeções de curto prazo para a evolução da epidemia. Sendo assim, para a estimação dos parâmetros, os dados reais considerados para ajuste referem-se ao período a partir de 19/03/2020, quando pode-se afirmar com mais certidão que tal medida estava vigente.

Medidas de controle de propagação de uma doença podem afetar os parâmetros do modelo, em especial o parâmetro de infecção, como comentado na seção anterior. Com o isolamento social, o número de contatos realizados por cada indivíduo diminui, e em consequência também diminui o contato entre suscetíveis e infectados. Logo, a velocidade de propagação da doença na população diminui e isso se reflete na redução do valor do parâmetro  $\beta$  em comparação a uma situação onde tal medida não é adotada. Cabe destacar que, neste estudo, os parâmetros foram

estimados considerando a adoção de tal medida vigente e os valores dos mesmos englobam tal situação.

Com relação à condição inicial, o processo de propagação inicia com 1 indivíduo infectado e  $N - 1$  suscetíveis, ou seja,  $(S(0), I(0), D(0), R(0)) = (N - 1, 1, 0, 0)$ . O tempo zero corresponde ao dia 26/02/2020, quando ocorre a primeira notificação oficial de um infectado no Brasil, segundo informação do Ministério de Saúde do Brasil<sup>5</sup>.

A unidade de tempo considerada é de um dia, tendo em vista que os dados reais divulgados são diários.

Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos com base nos dados reais divulgados até a data de 10/04/2020.

O valor para o tamanho da população do Brasil foi obtido na página do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) na Internet<sup>6</sup>.

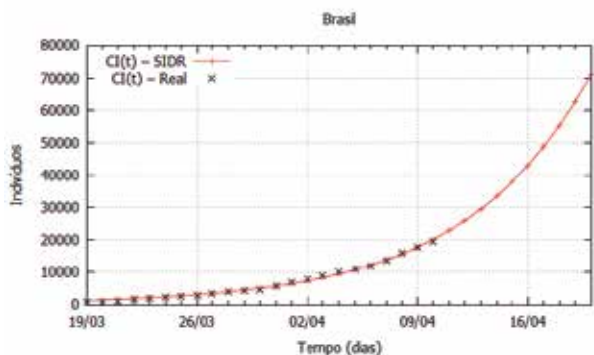
## 4. Resultados

A análise de modelagem de que trata este documento é um trabalho em andamento, em constante atualização e refinamento. Essa análise dinâmica é necessária pois, além da importância em atualizar os parâmetros conforme mais dados são divulgados, a situação da epidemia também muda ao longo do tempo. Novas medidas podem ser adotadas pela população, ou novos fatores podem vir a ser considerados. Nesta seção são apresentados resultados da modelagem obtidos até a data de 10/04/2020 para a população do Brasil, conforme a metodologia explicada na seção anterior.

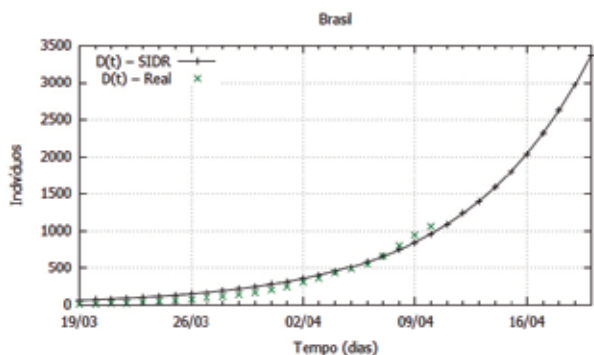
As **figuras 6 e 7** apresentam o número acumulado de indivíduos infectados e o número de óbitos, ao longo do tempo, no intervalo entre os

<sup>6</sup> Disponível em <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em 02/04/2020.

dias 19/03/2020 e 20/04/2020, respectivamente. Pode-se observar nas figuras o bom ajuste entre os resultados da modelagem e os dados reais do histórico da epidemia, validando, assim, o modelo implementado. Nesses gráficos são indicadas também projeções de curto prazo, mostrando a tendência de crescimento dos casos. O valor do número de reprodutibilidade basal  $R_0$  no período de análise é de 1,21, aproximadamente.



**Fig. 6** – Ajuste do modelo aos dados reais. Número acumulado de indivíduos infectados no período de 19/03/2020 até 20/04/2020, com estimativa do modelo no período de 11/04/2020 a 20/04/2020 e dados reais até a data de 10/04/2020.

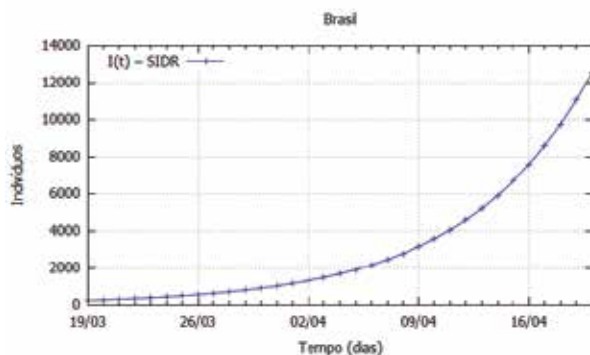


**Fig. 7** – Ajuste do modelo aos dados reais. Número de óbitos no período de 19/03/2020 até 20/04/2020, com estimativa do modelo no período de 11/04/2020 a 20/04/2020 e dados reais até a data de 10/04/2020.

Neste ponto da análise cabe destacar um alerta. O resultado da modelagem para a estimativa da evolução da doença quanto ao número de óbitos deve ser analisado com cautela. A ocorrência do óbito pode variar em um curto intervalo de tempo, por diversos motivos cuja discussão está fora do escopo deste estudo. Para exemplificar, alguns fatores que podem influenciar na mortalidade da doença no indivíduo infectado são as condições do tratamento disponibilizado, condições de saúde particulares, capacidade de atendimento hospitalar, tempo de diagnóstico, dentre outros.

A **figura 8** apresenta a estimativa do modelo para o número de indivíduos infectados no período de 19/03/2020 a 20/04/2020.

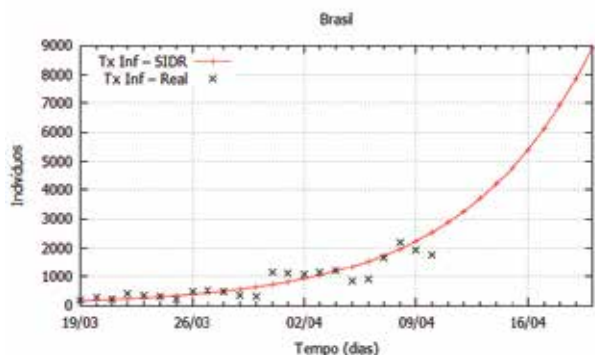
É importante lembrar que não há dados oficiais para comparação com essa métrica. No entanto, o gráfico é útil para se analisar como é o crescimento do número de indivíduos com a infecção ativa, ou seja, o número de indivíduos capazes de transmitir a doença



**Fig. 8** – Estimativa do modelo para o número de indivíduos infectados, no período de 19/03/2020 a 20/03/2020.

A **figura 9** apresenta a taxa de infecção no período de 19/03/2020 até 20/04/2020, com es-

timativa do modelo no período de 11/04/2020 a 20/04/2020 e dados reais até a data de 10/04/2020. Esse gráfico indica a curva de crescimento do número de novos casos da doença no curto prazo.



**Fig. 9** – Total de indivíduos infectados de 19/03/2020 até 20/04/2020, com estimativa do modelo no período de 11/04/2020 a 20/04/2020 e dados reais até a data de 10/04/2020

## 5. Conclusão

O presente artigo apresentou uma modelagem matemática para a epidemia de COVID-19 na população brasileira e um método para a obtenção de estimativas dos parâmetros do modelo. Foi utilizado como base o modelo matemático epidemiológico SIRD.

A partir de dados oficiais coletados do sistema de atendimento ao COVID19, é possível analisar o desenvolvimento da doença. Os resultados se referem a um cenário específico, população Brasileira, com as medidas de mitigação de propagação da doença não farmacológicas adotadas até o momento de escrita deste documento. Os dados reais utilizados para estimação dos parâmetros da modelagem são atualizados até a data de 10/04/2020.

A qualidade da previsão do desenvolvimento da epidemia está relacionada com a qualidade dos índices de notificação da doença pelo Sistema de Saúde, isto é, quanto mais eficiente for a testagem da

doença em casos suspeitos e a notificação para o Sistema de Saúde, melhor serão os resultados da modelagem, uma vez que a curva de desenvolvimento da epidemia ajusta-se aos números informados no processo de modelagem. Os parâmetros do modelo devem ser estimados com certa periodicidade, acompanhando os dados reais divulgados, de forma a atualizar os resultados da modelagem.

Na Seção 4, foram apresentados os resultados preliminares do presente estudo, com projeções de curto prazo para a evolução da epidemia no Brasil. Outros resultados de médio e longo prazos, além da comparação de cenários considerando diferentes medidas de controle de propagação, também foram obtidos e encontram-se em fase de consolidação e análise.

No processo de análise dos resultados, cabe ressaltar um alerta, já mencionado na Seção 4. A estimativa para o número de óbitos deve ser analisada com cautela, pois pode variar com as condições do tratamento disponibilizado ao paciente e a capacidade hospitalar do país, dentre outros fatores.

É importante ressaltar que os resultados apresentados neste documento são teóricos, obtidos de forma técnica e objetiva, com base simplesmente no resultado matemático que a modelagem fornece. Este estudo não tem o objetivo de analisar impactos econômicos ou sociais de qualquer medida adotada pelas autoridades governamentais, e também não reflete a opinião pessoal dos autores acerca da adoção ou não adoção de qualquer medida.

## Agradecimentos

Agradecemos a Anderson Fernandes Pereira dos Santos, Chefe da Seção de Engenharia de Computação do Instituto Militar de Engenharia, pelo apoio e incentivo na realização do presente trabalho.



## Referências bibliográficas

- [1] F. Wu, S. Zhao, B. Yu, Y.-M. Chen, W. Wang, Z.-G. Song, Y. Hu, Z.-W. Tao, J.-H. Tian, Y.-Y. Pei, M.-L. Yuan, Y.-L. Zhang, F.-H. Dai, Y. Liu, Q.-M. Wang, J.-J. Zheng, L. Xu, E. C. Holmes, Y.-Z. Zhang, A new coronavirus associated with human respiratory disease in china, *Nature*, vol. 579, 2020, pgs 265–269.
- [2] S. B. Bastos, D. O. Cajueiro, Modeling and forecasting the Covid-19 pandemic in Brazil, Universidade de Brasília, 2020.
- [3] R. M. Cotta, C. P. Naveira-Cotta, p. magal, Modelling the covid-19 epidemics in Brazil: Parametric identification and public health measures influence, doi:10. 1101/2020.03.31.20049130. URL <https://www.medrxiv.org/content/early/2020/04/03/2020.03.31.20049130>
- [4] K. Roosaa, Y. Leea, R. Luoa, A. Kirpicha R. Rothenberga, J. M. Hymanb P. Yanc, G. Chowell, Real-time forecasts of the COVID-19 epidemic in China from February 5th to February 24th, 2020, *Infectious Disease Modelling*, vol. 5, 2020, pgs 256-263.
- [5] D. Fanellia, F. Piazza, Analysis and forecast of COVID-19 spreading in China, Italy and France, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 134, 2020.
- [6] G. M. S. Dias, L. H. C. Araújo, Modelagem Matemática para Epidemia de COVID-19 e Estimativa de Casos no Brasil, Instituto Militar de Engenharia. Grupo de Assessoramento Científico, 2020. URL <http://www.comp.ime.eb.br/covid19/artigo1.pdf>
- [7] W. Hamer, The Milroy lectures on epidemic disease in England: the evidence of variability and of persistency of type, Bedford Press, 1906.
- [8] L. J. S. Allen, A. M. Burgin, Comparison of deterministic and stochastic sis and sir models in discrete time, *Mathematical Biosciences*, vol. 163, nr. 1, 2000, pgs 1–33. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/10652843>
- [9] L. J. S. Allen, An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology, Pearson Prentice Hall, 2003. URL <http://www.hit.ac.il/staff/leonidM/stochastic-processes/Chapter-2.pdf>
- [10] N. T. J. Bailey, A simple stochastic epidemic, *Biometrika*, vol. 37, nr. 3-4, 1950, pgs 193–202.
- [11] N. T. J. Bailey, The total size of a general stochastic epidemic, *Biometrika*, vol. 40, nr. 1-2, 1953, pgs 177–185. URL <http://biomet.oxfordjournals.org/cgi/doi/10.1093/biomet/40.1-2.177>
- [12] D. J. Daley, J. Gani, Epidemic Modelling: An Introduction, Cambridge Studies in Mathematical Biology, 2001.
- [13] N. C. Grassly, C. Fraser, Mathematical models of infectious disease transmission, *Nature Reviews Microbiology*, vol. 6, nr. 6, 2008, pgs. 477–487. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18533288>
- [14] H. Hethcote, The mathematics of infectious diseases, *SIAM review*, 2000, pgs 599–653.
- [15] A. Kaddar, A. Abta, H. T. Alaoui, A comparison of delayed sir and seir epidemic models, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. 16, nr. 2, 2011, pgs 181–190.
- [16] M. G. Roberts, J. A. P. Heesterbeek, Mathematical models in epidemiology, Mathematical models. UNESCO-EOLSS, 2004.
- [17] Vargas-De-León, Cruz. Modeling control strategies for influenza A H1N1 epidemics: SIR models. *Revista Mexicana de Física*, vol. 58, 2012, pgs 37–43.
- [18] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London Series A Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 115, nr. 772, 1927, pgs 700–721. URL: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1927.0118>
- [19] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, Contributions to the mathematical theory of epidemics. ii. the

- problem of endemicity, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, vol. 138, nr. 834, 1932, pgs 55–83. URL: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1932.0171>
- [20] G. M. S. Dias, *Modelo epidemiológico SIR aplicado a redes tolerantes a atrasos e desconexões*, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2013.
- [21] G. M. S. Dias, R. M. Salles, Epidemic SIR model applied to delay-tolerant networks, 30th Brazilian Telecommunications Symposium, SBrT'12, SBrT, 2012.
- [22] M. J. Keeling, P. Rohani, *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*, Princeton University Press, 2011.
- [23] P. van den Driessche, Reproduction numbers of infectious disease models, *Infectious Disease Modelling*, vol. 2, nr. 3, 2017, pgs 288-303.

# Determinação do coeficiente de difusão do metamizol sódico (dipirona comercial) utilizando método de condutivimetria e monitoramento por micro controlador Arduino

Dirceu C S Júnior\*, Matheus M Massardi, Thaynara R Mendonça, Ricardo A S Mendonça, Isabela C Matosinhos, Antonio M O Siqueira

Departamento de Química - UFV (DEQ/UFV) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG, 36570-900 - Brasil  
dirceu.silva@ufv.br

**RESUMO:** A dipirona comercial é um dos analgésicos mais utilizados no Brasil e poucos estudos foram realizados para determinar o mecanismo de difusão no organismo. Nesse estudo utilizou-se uma célula de difusão, mediu-se a concentração de dipirona por condutivimetria e monitorou-se a temperatura e o pH através de micro controladores. Os dados obtidos foram usados para determinar o coeficiente de transferência de massa da dipirona em água com temperatura e pH constantes. A partir de uma modelagem matemática baseada em equações da transferência de massa e análises de incertezas, obteve-se que o coeficiente de difusão da dipirona é  $(1,26 \cdot 10^{-6} \pm 2,6 \cdot 10^{-9}) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

**PALAVRAS-CHAVE:** Arduino. Coeficiente de difusão. Condutividade. Dipirona. Transferência de massa..

**ABSTRACT:** Commercial dipyrone is one of the most commonly used analgesics in Brazil and few studies have been performed to determine its mass transfer in the human organism. In this study, a diffusion cell was used, the concentration of dipyrone was measured by conductivity and the temperature and pH were monitored by microcontrollers. The data obtained were used to determine the mass transfer coefficient of dipyrone in water with constant temperature and pH. From a mathematical modeling based on mass transfer equations and analysis of uncertainties it was obtained that the diffusion coefficient of dipyrone is  $(1,26 \cdot 10^{-6} \pm 2,6 \cdot 10^{-9}) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

**KEYWORDS:** Arduino. Conductivity. Diffusion coefficient. Dipyrone. Mass transfer. .

## 1. Introdução

A transferência de massa é um fenômeno frequentemente encontrado em diversas áreas da engenharia, tais como em reatores químicos, separações, dentre outras. Esse processo tem como força motriz o gradiente de concentração, ou seja, ele acontece apenas se houver diferença de concentração entre duas regiões, e ocorre da região mais concentrada para a menos concentrada [1]. O transporte da

massa pode ocorrer por meio da difusão, no interior de sólidos, de líquidos e gases. Nesse caso, as partículas são transportadas de maneira a diminuir o gradiente de concentração que existe no meio. Um estudo aprofundado sobre como ocorre esse fenômeno e de suas aplicações é de extrema importância, uma vez que, através dele, é possível compreender como algumas substâncias interagem entre si [1].

O fenômeno de transferência de massa em sistemas biológicos é de extrema importância, pois possibilita a manutenção da célula, controlando

entrada de gases e saída de substâncias através da membrana celular. Esse fenômeno, em sistemas biológicos é chamado Difusão Simples ou Difusão Facilitada [2]. Já na indústria, esse processo é essencial em processos físicos de separação de misturas e até mesmo no estudo cinético da efetividade da reação. O estudo do efeito da difusão mássica é essencial para dimensionamento de reatores e predição de conversão de reações [3]. Algumas das operações que utilizam a transferência de massa e que são amplamente usadas nas indústrias são: destilação, secagem e extração [4].

Chang et al. [5], atentos à atual grande preocupação a presença de produtos farmacêuticos e de cuidados pessoais no meio aquático (rios, lagos e águas residuais e estações de tratamento), avaliaram a absorção de alguns fármacos terapêuticos, antiinflamatórios não esteroides, analgésicos, antibióticos, antiepiléticos e concluíram que a sua difusão está diretamente relacionada ao tamanho e porosidade das partículas dos medicamentos.

A partir disso, tem-se que o estudo do transporte de partículas por difusão pode proporcionar um melhor entendimento da forma como certos medicamentos são metabolizados no corpo humano (meio gástrico). No caso deste trabalho, o medicamento escolhido para estudo foi a dipirona, que age como analgésico, antipirético e espasmolítico.

A dipirona é um derivado pirazolônico de rápida absorção e amplamente metabolizado. Apesar de ser um dos medicamentos mais receitados e utilizados no Brasil, sua venda é proibida nos Estados Unidos e em vários países da Europa, devido a seus possíveis efeitos colaterais, tais como agranulocitose (queda no número de granulócitos na corrente sanguínea) e anemia aplásica (doença rara na qual os pacientes apresentam

uma ressaltada hipocelularidade na medula óssea) [6] [7].

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é determinar o coeficiente de difusão da dipirona em água, em diferentes valores de pH, por meio da utilização de uma célula de difusão, um condutivímetro e um microcontrolador Arduino UNO, e, através desses valores, compreender como acontece a difusão deste medicamento no corpo humano.

## 2. Fundamentação teórica

A segunda lei da termodinâmica estabelece que o fluxo de matéria de uma determinada espécie química ocorrerá de uma região mais concentrada a outra de menor concentração [8]. Denomina-se soluto a espécie que é transferida e o conjunto soluto-solvente é denominado mistura ou solução. O fenômeno de transferência de massa ocorre em virtude da resistência oferecida pelo meio à movimentação do soluto, de forma que essa resistência está associada à interação soluto-meio (difusão) e à ação externa (convecção mássica) [8] [9].

Na ausência de outros gradientes como de temperatura ou pressão, as moléculas do soluto serão transferidas das regiões de alta concentração para regiões de concentrações baixas, o que origina o fluxo molar das espécies. Esse gradiente é o que origina o fluxo molar da espécie, que é denominado de difusão [6]. A descrição matemática que envolve tanto o gradiente de concentração quanto a resistência à difusão é dada pela Lei de Fick (Eq. 1) [8][9][10].

$$J_A'' = -D_{AB} \nabla C_A \quad (1)$$

$J_A''$  é o fluxo molar da espécie A ( $\text{mol s}^{-1} \text{m}^{-2}$ ),  $D_{AB}$  é o coeficiente de transferência de massa da



espécie A no soluto B ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ) e  $\nabla C_A$  é o gradiente de concentração da espécie A ( $\text{mol m}^{-2}$ ). Nota-se que a difusão de uma espécie é proporcional ao seu coeficiente de transferência de massa, sendo sua determinação de grande importância [8][11].

Existem diversas teorias que estimam o seu valor em misturas gasosas, como a equação de Chapman-Enskog e a correlação de Fuller, Schetter e Giddings [8][9]. No entanto, a análise do mecanismo de difusão em um meio líquido é complexa e não há uma teoria que abranja as particularidades do fenômeno nesse meio [8]. Por esse motivo, muitos estudos vêm sendo desenvolvidos para a determinação experimental do coeficiente de transferência massa. Esses trabalhos envolvem a difusão de compostos eletrólitos, como o metamizol sódico (dipirona sódica), e não-eletrólitos em soluções líquidas.

Chang e Myerson [12] estudaram a difusão de cloreto de potássio (KCl) e cloreto de sódio (NaCl) em soluções aquosas concentradas, saturadas e supersaturadas. Os coeficientes de transferência de massa foram determinados a  $25^\circ\text{C}$  com concentrações variando entre  $0,70$  e  $4,23 \text{ mol L}^{-1}$ , para o KCl e entre  $0,10$  e  $5,46 \text{ mol L}^{-1}$  para o NaCl. Utilizando o método de interferometria de Gouy, os autores relataram que o aumento da concentração dos sais até a saturação eleva o coeficiente de transferência de massa de forma praticamente linear. Após a saturação, mínimos aumentos da concentração fazem o coeficiente diminuir rapidamente até valores próximos de zero.

Magalhães et al. [13] analisaram a difusão do cloreto de sódio (NaCl) (halita) em água potável, investigando o efeito da temperatura e do grau de agitação no processo de dissolução. Os experimentos foram conduzidos variando-se a temperatura de  $30$  a  $60^\circ\text{C}$ , em intervalos de  $15^\circ\text{C}$ . A agitação do sistema foi realizada a  $383$ ,  $479$  e

$574 \text{ RPM}$ , testando suas influências para todas as temperaturas. Os autores reportaram que a uma temperatura, o aumento da rotação dentro do sistema aumenta o valor do coeficiente de transferência de massa. Paralelamente, mantendo-se a rotação constante, acréscimos na temperatura aumentam os valores do coeficiente de transferência de massa.

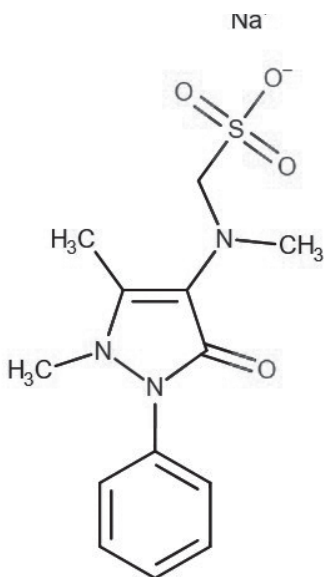
Martins [14] estudou a modelagem e determinação do coeficiente de transferência de massa do cloreto de sódio (NaCl) no escoamento da salmoura. As concentrações do sal foram determinadas por condutivimetria, construindo uma curva de calibração para soluções de concentração conhecida e gravimetria, por meio da evaporação de determinado volume de salmoura.

Os testes foram realizados com soluções nas concentrações de  $32 \text{ g L}^{-1}$ ,  $90 \text{ g L}^{-1}$ ,  $175 \text{ g L}^{-1}$  e  $258 \text{ g L}^{-1}$ , representando  $10,2\%$ ,  $28,5\%$ ,  $55,5\%$  e  $82,0\%$  da concentração de saturação, respectivamente.

## 2.1 Metamizol Sódico

O fármaco metamizol sódico (ácido 1-fenil-2,3-dimetil-5-pirazolona-4-metilaminometanossulfônico), conhecido comercialmente como dipirona sódica, é um derivado pirazolônico utilizado como medicamento analgésico e antipirético. A sua fórmula Molecular é  $\text{C}_{13}\text{H}_{16}\text{N}_3\text{NaO}_4\text{S}\cdot\text{H}_2\text{O}$ , o seu peso molecular é igual a  $351,36 \text{ g/mol}$ . Esse medicamento é muito utilizado pela população brasileira em diversas apresentações farmacêuticas (solução oral, injetável, comprimidos e supositórios). É encontrado principalmente como um pó cristalino, quase branco e inodoro, sendo solúvel em água e em metanol e pouco solúvel em etanol e praticamente insolúvel em éter etílico, acetona, benzeno e clorofórmio, conforme esclarecem Knappmann et al. [15]. Estes autores [15] destacam também que, “apesar de ser um

anti-inflamatório não esteroide (AINE) fraco, a dipirona é um potente analgésico e antipirético, sendo indicada para patologias como cefaleias, neuralgias e dores reumáticas, de fibras musculares lisas (por exemplo, cólica renal), pós-operatórias e de outras origens”. Seu mecanismo de ação não é completamente conhecido, mas se baseia na inibição da síntese de prostaglandinas pelo bloqueio de enzimas ciclooxigenases (COXs) [16]. Sua estrutura química, apresentada na **figura 1**, apresenta grupamentos amino, fenil pirazol e sulfonato. É um derivado do metamizol, o qual difere apenas no grupo sulfonato, que é protonado e, portanto, um ácido sulfônico.



**Fig. 1** – Estrutura química do metamizol sódico (dipirona comercial). Fonte: [17].

O metamizol apresenta pKa de -1.2 [17], o que o caracteriza como ácido forte. Dessa forma, pode-se assumir que não há formação deste ao solubilizar metamizol sódico em água. Isso possibilita a medição de concentração do medicamento em água através da condutividade elétrica, uma vez que esse se apresenta na forma iônica em qualquer pH.

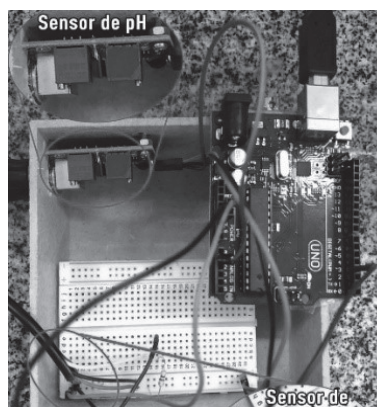
## 3. Materiais e metodologia

### 3.1 Materiais

Na análise da temperatura e pH do sistema, utilizou-se a placa Arduino Uno, conectada ao sensor de temperatura à prova d'água DS18B20 e ao sensor de medição de pH U3525, sendo o eletrodo de vidro do modelo K38-1465, da marca KASVI.

Para a montagem do programador serial Arduino Uno juntamente aos sensores, foram colocados alguns jumpers em uma plataforma Proto-board com as devidas conexões, e um conector de entrada USB entre a placa e o computador, como colocado pela **figura. 2**.

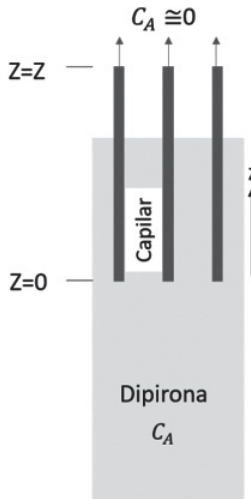
Também foi utilizada a dipirona monoidratada Alivdip, do laboratório Teuto, com concentração nominal de 500 mg mL<sup>-1</sup> (1522,6 mol m<sup>-3</sup>); um condutivímetro portátil Lutron, modelo CD-4301; balões volumétricos de 1000 1mL e 2500,5mL; pipetas volumétricas 1 0,005mL; tubo em U, com 3 capilares na ponta de alturas iguais a 5 cm e diâmetros de 1cm; conta-gotas; béquer de 1000 10mL e o agitador magnético com aquecimento IKA C-MAG HS 7.



**Fig. 2** – Montagem do circuito para a obtenção de dados de temperatura e pH do sistema.

### 3.2 Modelagem matemática da célula de difusão

O estudo foi baseado na utilização de uma célula de difusão com capilares para determinar o coeficiente de transferência de massa da dipirona em água, como pode ser descrito na **figura 3**.



**Fig. 3** – Esquema do processo de difusão da dipirona.

Considerando que a difusão ocorre em regime permanente, de forma unidimensional e sem reação química, o fluxo molar da dipirona é constante [8][9]. Assumindo que a concentração de dipirona seja muito pequena na saída dos capilares (não há contribuição convectiva) e que os capilares têm altura  $z$ , da Lei de Fick Generalizada, tem-se que:

$$N_A'' = \frac{D_{AB}C_A}{z} \quad (2)$$

Onde  $N_A''$  é o fluxo molar de dipirona ( $\text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ),  $D_{AB}$  é o coeficiente de transferência de massa ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ),  $C_A$  é a concentração de dipirona no in-

terior dos capilares ( $\text{mol m}^{-3}$ ) e  $z$  é a altura dos capilares (m).

Multiplicando-se a equação acima pela área da seção transversal dos  $N$  capilares, é possível obter a taxa em que a dipirona se difunde para a água:

$$N_A = \frac{N\pi d^2 D_{AB} C_A}{4z} \quad (3)$$

Tal que  $N$  é o número de capilares,  $d$  é o diâmetro de um capilar (m) e  $N_A$  é a taxa em que a dipirona se difunde ( $\text{mol s}^{-1}$ ).

Realizando o balanço de massa para a dipirona que se difunde em água, pode-se relacionar a difusão com a variação do tempo.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{N\pi d^2 D_{AB} C_A}{4z} \quad (4)$$

$M$  é a quantidade de mol de dipirona difundida (mol) e  $t$  é o tempo de difusão (s).

A quantidade de mol de dipirona na água foi mensurada a partir de medidas de condutividade e essas grandezas se relacionam da seguinte maneira quando se considera que a concentração de dipirona na água é a mesma em todos os pontos do volume de controle:

$$M = Vk\beta \quad (5)$$

$V$  é o volume de água ( $\text{m}^3$ ),  $k$  é a condutividade ( $\text{S s}^{-1}$ ) e  $\beta$  é a constante de proporcionalidade entre concentração e condutividade que foi obtida com a curva de calibração ( $\text{mol m}^{-3} \text{S}^{-1}$ ).

Dessa forma, utilizando as informações da Eq. 5 e rearranjando a Eq. 4, tem-se que:

$$D_{AB} = \frac{4Vz\beta}{N\pi d^2 C_A} \frac{dk}{dt} \quad (6)$$

A equação 6 demonstra que o coeficiente de transferência de massa está intimamente relacionado com a variação da condutividade da solução aquosa com o tempo, de modo que se pode obter esse valor analisando o coeficiente angular da curva de condutividade versus tempo.

### 3.3 Análise da propagação de incertezas

Onde  $w_{D_{AB}}$  é a incerteza do valor do coeficiente de transferência de massa ( $m^2 s^{-1}$ );  $x_1, \dots, x_n$  são todas as variáveis utilizadas no cálculo de  $D_{AB}$  e que são descritas na Eq. 6; e  $w_{x_1}, \dots, w_{x_n}$  são as incertezas dessas medições.

Os resultados apresentados foram calculados com auxílio do software proprietário *Engineering Equation Solver* – EES - (versão 10.643 2019-05-25, Licença Acadêmica-Comercial), o qual utiliza a metodologia apresentada para o cálculo de incertezas, e o software Excel para a análise de regressões e confecção dos gráficos. O software EES apresenta as seguintes características básicas:

- Opera em todos os sistemas operacionais Microsoft Windows (XP, 7, 8 e 10);
- Resolve até 24.000 equações não lineares simultâneas;
- Equações podem ser inseridas em qualquer ordem;
- Velocidade computacional extremamente rápida;
- Alta precisão termodinâmica e funções de transporte para 100 de fluidos;
- Conversão de unidades e verificação automática de consistência unitária;
- Estudos paramétricos com tabela tipo planilha;
- Capacidade de otimização única e multi-variável;

- Análise de incerteza e capacidade de regressão;
- Plotagem profissional (2-D, contorno e 3-D) com atualização automática;
- LaTeX, PDF, bem como saída impressa
- Recursos gráficos de entrada / saída do usuário com a janela Diagrama;
- Funções de biblioteca de transferência de calor para condução, convecção e radiação;
- Link para outros programas como Fortran, C / C ++, Python, Excel e MATLAB.

### 3.4 Metodologia

Antes de se determinar o coeficiente de difusão do metamizol sódico, construiu-se uma curva de calibração, medindo a condutividade de diferentes soluções de dipirona alterando-se a concentração das mesmas. Para tanto, foram preparadas soluções nas proporções de 1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500, 1:250 e 1:100 diluindo-se a dipirona comercial em água destilada.

Para realização do experimento, primeiramente preencheu-se um béquer de 1000 mL em sua totalidade com água destilada e mediu-se os valores iniciais de temperatura e pH utilizando os sensores. Foi feita a verificação da condutividade da água num instante inicial. O tubo em U foi completamente preenchido com o metamizol sódico e, em seguida, inserido no béquer, sustentado por garras de suporte, de modo que a extremidades dos capilares presentes na parte superior do tubo esteja coberta por água, mas a outra extremidade esteja em contato com o ar atmosférico. Esta etapa foi realizada com a extremidade dos capilares inicialmente bloqueadas, de modo que o fenômeno da difusão não se verifique antes do acompan-



hamento do tempo decorrido. Verificada essa condição, liberam-se os capilares para medição da variação da condutividade com a passagem do tempo e possíveis alterações nos valores de temperatura e pH, inspecionadas pelo computador. Todos os experimentos foram realizados em triplicata.

### 3.5 Programação em Arduino

A plataforma Arduino é um tipo de open-source baseada em software hardware e destinada às áreas de automação e robótica. O Arduino é uma plataforma de prototipagem eletrônica de hardware livre e de placa única, projetada com um microcontrolador fabricado pela ATMEL AVR, com suporte de entrada/saída embutido, com uma linguagem de programação C/C++, como padrão [19].

Para a parte referente à medição de temperatura, foi preciso fazer a instalação de duas bibliotecas no diretório *libraries* da IDE Arduino. A *OneWire*, que é dedicada à comunicação da Arduino com sensores digitais no protocolo *1-Wire*, e a biblioteca *DallasTemperature* para a comunicação com os sensores DS18B20.

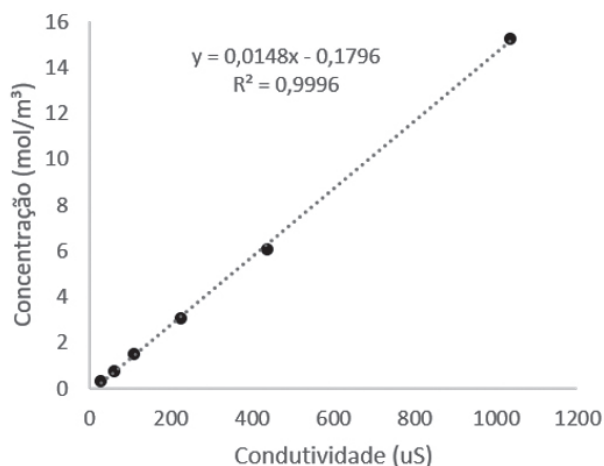
Em relação a medição de pH, o código independe de bibliotecas auxiliares. Entretanto, foi necessário realizar a correção da medida realizada pelo sensor U3525 através de uma equação de calibração com soluções tampão, dada por:

$$pH_{Value} = -5.4545 \text{valorCorrig} \quad (7)$$

E então, conforme ocorre a execução do programa como um todo, o número de identificação referente a cada sensor é obtido e guardado, podendo ser acompanhado no monitor do PC ao utilizar a função *Serial Monitor* da IDE Arduino.

## 4. Resultados e discussão

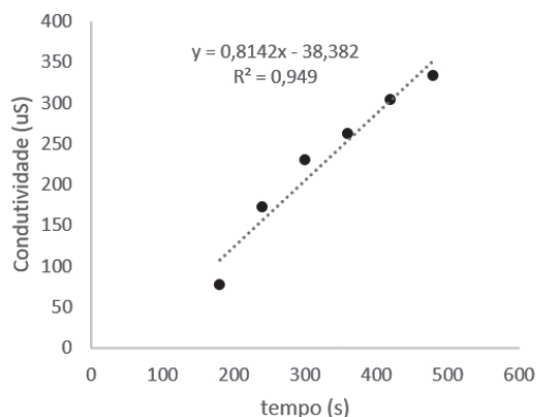
A curva de calibração que foi realizada para determinar o coeficiente  $\beta$  é exibida na **figura 4**. A partir dos dados de regressão linear e análise de incertezas, obteve-se que o coeficiente angular da curva ( $\beta$ ) tem valor igual a  $(0,013847 \cdot 10^{-7}) \text{ mol m}^{-3} \mu\text{S}^{-1}$ . Também se pode notar que a relação entre condutividade e concentração da solução de dipirona é linear, como foi proposto anteriormente, pois essa é utilizada na forma de sal.



**Fig. 4** – Curva de calibração que relaciona concentração de dipirona e condutividade.

Na determinação do coeficiente de transferência de massa da dipirona, a temperatura da água teve variação de  $0,31^\circ\text{C}$ , tal que seus valores mínimos e máximos foram, respectivamente,  $27,44^\circ\text{C}$  e  $27,75^\circ\text{C}$ . O pH manteve-se entre 7,05 e 7,14. Os dados obtidos com a variação de pH não foram conclusivos.

A **figura 5** mostra os dados obtidos para a difusão da dipirona com o tempo na célula de difusão.



**Fig. 5** – Medidas de condutividade versus tempo da dipirona difundida em água.

Por regressão linear e análise de incertezas, obteve-se o valor de igual a  $(0,8142 \pm 1,43 \cdot 10^{-3}) \text{ S s}^{-1}$ . Foram observados desvios da linearidade nesse estudo e isso pode ser explicado pela dificuldade de se medir a concentração exata da dipirona na água, pois essa não se misturava completamente no volume de controle descrito, o que refuta uma das considerações feitas previamente. Também não foi possível aumentar a agitação, pois isso promovia a difusão forçada da dipirona, ou seja, a elevação da contribuição convectiva.

Com os dados obtidos nas duas regressões, foi possível obter igual a  $(1,26 \cdot 10^{-6} \pm 2,6 \cdot 10^{-9}) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Da análise de incertezas, nota-se boa precisão no valor encontrado para o coeficiente de difusão da dipirona. Ressalta-se que, no trabalho de Boni et al. [20], o coeficiente de difusão para o metamizol sódico em uma solução aquosa específica, na temperatura de 298 K, foi estimado em  $5,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Quando comparado com o coeficiente de difusão de outra solução salina, como o NaCl com concentração de  $2000 \text{ mol m}^{-3}$ , o resultado obtido é cerca de mil vezes maior. Para a solução de NaCl na concentração descrita e a uma temperatura igual a  $25^\circ\text{C}$ , é igual a  $1,51 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

[12]. Por ser um medicamento, era esperado um valor elevado de seu coeficiente de transferência de massa, pois a dipirona deve se difundir rapidamente no sangue para promover seu efeito analgésico e antitérmico.

## 5. Conclusão

Utilizando uma célula de difusão e monitoramento por condutivimetria e micro sensores, foi possível obter o coeficiente de transferência de massa para a dipirona (metamizol sódico) em água. O valor obtido foi de  $1,26 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , demonstrando ser maior que o de outras soluções salinas, como a de NaCl.

O estudo realizado é importante por analisar propriedades físicas de um dos medicamentos mais utilizados no Brasil. Deve-se também incentivar novos estudos para avaliar o efeito da temperatura e pH no coeficiente de difusão da dipirona e de outros medicamentos. Dessa forma, pode-se simular o comportamento dessas substâncias no corpo humano.

Como sugestão, para qualificar os dados experimentais, seria melhorar o controle de temperatura do sistema experimental, utilizando-se um banho-maria. Poder-se-ia, ainda, fazer a análise da variação do coeficiente de difusão com a temperatura, o que seria enriquecedor para o trabalho.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio por parte da Universidade Federal de Viçosa (UFV). O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).

## Referências bibliográficas

- [1] Çengel, Y.A.; Ghajar, A.J.; Transferência de Calor e Massa- Uma Abordagem Prática. Tradução de Fátima A. M. Lino, 4ª. Ed. AMGH Editora Ltda.: Porto Alegre, 2012.
- [2] Kierszenbaum, Abraham. Histologia e Biologia Celular - Uma Introdução À Patologia. Editora Elsevier, 4ª edição, 2016.
- [3] Fogler, H. S.; Elementos de Engenharia das Reações Químicas, 4ª. ed., LTC: Rio de Janeiro, 2009.
- [4] Cremasco, Marco Aurélio. Fundamentos de transferência de massa. Editora: UNICAMP, 3ª edição 2016.
- [5] Chang, E. E., Wan, J. C., Kim, H., Liang, C. H., Dai, Y. D. and Chiang, P. C. Adsorption of Selected Pharmaceutical Compounds onto Activated Carbon in Dilute Aqueous Solutions Exemplified by Acetaminophen, Diclofenac, and Sulfamethoxazole. The Scientific World Journal, Volume 2015, 2015. Article ID 186501, 11 pages.
- [6] Danieli, P.; Leal, M. B.; Avaliação da Segurança da Dipirona: Uma Revisão. Revista Brasileira de Farmácia, 2003, 84(1): 17-20. Disponível em: < [http://rbfarma.org.br/files/RBF\\_V84\\_N1\\_2003\\_PAG\\_17\\_20.pdf](http://rbfarma.org.br/files/RBF_V84_N1_2003_PAG_17_20.pdf) > Acesso em: 24/01/2020.
- [7] Marcolino Júnior, L. H.; Bonifácio, V.G.; Fatibello Filho, O.; Determinação Turbidimétrica de Dipirona em Fluxo Utilizando um Reator Contendo Cloreto de Prata Imobilizado em Resina Poliéster. Química Nova, 2005, v.28, n.5, p.783-787. Disponível em: < <http://www.scielo.br/pdf/qn/v28n5/25900.pdf> > Acesso em: 23/01/2020.
- [8] Cremasco, M.A.; Fundamentos de Transferência de Massa, 2nd ed., Editora Unicamp: Campinas, 2009.
- [9] Welty, J.; Wicks, C.E.; Wilson, R.E.; Rorrer, G.L.; Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer, 5th ed. John Wiley & Sons, Inc.: New Jersey, 2007.
- [10] Fogler, H. S.; Elementos de Engenharia das Reações Químicas, 4th ed., LTC: Rio de Janeiro, 2009.
- [11] Hamborg, E. S.; Kersten, S. R. A.; Versteeg, G. F.; Absorption and desorption mass transfer rates in non-reactive systems. Chemical Engineering Journal, 2010, 16, 191-195.
- [12] Chang, Y. C.; Myerson, A.S. The Diffusivity of Potassium Chloride and Sodium Chloride in Concentrated, Saturated, and Supersaturated Aqueous Solutions; AIChE Journal. 1985, 31, 6, 890-894.
- [13] Magalhães, S. C.; Calçada, L. A.; Scheid, C. M.; Pinto, J. C.; Determinação do coeficiente de transferência de massa do cloreto de sódio em água em sistemas agitados; ENGEVISTA 2014, 16, 330.
- [14] Martins, L. A. A.; Modelagem e determinação do coeficiente convectivo de transferência de massa de partículas de NaCl no escoamento de salmoura; Tese de Mestrado; Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Brasil, 2014.
- [15] Knappmann, André Leandro, & Melo, Eduardo Borges de. Qualidade de medicamentos isentos de prescrição: um estudo com marcas de dipirona comercializadas em uma drogaria de Cascavel (PR, Brasil). Ciência & Saúde Coletiva, 15(Suppl. 3), 3467-3476, 2010.
- [16] Jasiecka, A.; Maślanka, T.; Jaroszewski, J. J. Pharmacological characteristics of metamizole. Polish journal of veterinary sciences, v. 17, n. 1, p. 207-214, 2014.
- [17] Drugbank; Metamizole; <https://goo.gl/hxyLMR>; acessada em janeiro de 2020.
- [18] Pereira, E. L.; Dias, B. E.; Leris, B. N.; Tanure, J. S.; Propagação de erros e incertezas em experimentos. Revista da Universidade Vale do Rio Verde. 2016, 14, 2, 1136-1151.
- [19] Deshmukh, A. V. Microcontrollers -Theory And Applications. Noida, UP, India: Tata McGraw Hill, 2005.
- [20] PJRC; [http://www.pjrc.com/teensy/td\\_libs\\_OneWire.html](http://www.pjrc.com/teensy/td_libs_OneWire.html), acessada em 15/01/2020.
- [21] Boni, A. C., Wonga, A., Dutra, R. A. F., Sotomayor, M. P. T. Cobalt phthalocyanine as a biomimetic catalyst in the amperometric quantification of dipyrone using FIA. Talanta 85, 2067-2073, 2011.

# Análise de desempenho $\mathcal{L}_2$ de sistemas lineares a parâmetros variáveis utilizando a transformada Haar no contexto do paradigma de Lyapunov

Ana Catarina Almeida Filizola de Abreu<sup>a</sup>, Patricia Thompson Bandeira<sup>b</sup>, Paulo César Pellanda<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Instituto Militar de Engenharia, Praça General Tibúrcio, 80 – 22290-270 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

<sup>b</sup>Escola Naval, Av. Almte. Sylvio de Noronha, s/n Castelo – 20021-010 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

\* camilo.marcelo@eb.mil.br

**RESUMO:** Este trabalho introduz novas caracterizações do tipo Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês Linear Matrix Inequalities) para análise de desempenho robusto tipo de sistemas Lineares a Parâmetros Variáveis (LPV) ou quasi-LPV, por meio do uso de Funções de Lyapunov (FL) assintoticamente -quadráticas. Os novos algoritmos se baseiam em uma técnica recente de análise de estabilidade que utiliza gradeamento paramétrico por meio da expansão da Transformada Wavelet Haar das funções de dependência paramétrica do sistema e na busca de FL assintoticamente -quadráticas, ou seja, FL com dependência quadrática em relação aos estados do sistema e assintoticamente em relação aos parâmetros variantes no tempo. O método é aplicável a sistemas com qualquer tipo de dependência paramétrica e a domínios paramétricos irregulares, propriedades ausentes em outras técnicas de análise de desempenho de sistemas LPV. Um exemplo numérico é apresentado para validação dos algoritmos propostos e comparação de resultados com aqueles obtidos por outro método mais conservador.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas LPV. Transformada Wavelet Haar. Desempenho Robusto

**ABSTRACT:** This paper introduces new Linear Matrix Inequalities (LMI) characterizations to -type robust performance analysis of Linear Parameter Varying (LPV) systems, via asymptotically -quadratic Lyapunov Functions (LF). The new algorithms are based in a recent stability analysis technique that uses parameter gridding via Haar Wavelet Transform of system parameter dependence functions and in searching for asymptotically -quadratic LF, i.e. LF having a quadratic dependency on the system states and an asymptotically dependency on the time-varying parameters. The method is applicable to systems having any type of parameter dependency and to irregular parameter domains, properties which are not present in other performance analysis techniques of LPV systems. Two numerical examples are used to validate the proposed algorithms and to compare results with those obtained by a more conservative method.

**KEYWORDS:** LPV Systems. Haar Wavelet Transform robust performance.

## 1. Introdução

Sistemas não lineares podem ser modelados, para fins de análise e síntese, como Lineares a Parâmetros Variáveis (LPV) ou quasi-LPV. A denominação quasi-LPV se aplica quando pelo menos um elemento do vetor de parâmetros dependentes do tempo é uma variável endógena, ou seja, depende

também da própria dinâmica do modelo [1].

A análise de estabilidade e de desempenho robusto de sistemas LPV continua a ser um desafio, a despeito dos notáveis progressos recentes na teoria de controle de sistemas dinâmicos, particularmente de controle LPV. A maior parte dos métodos de análise e síntese para sistemas incertos ou variantes no tempo, baseados na teoria de Lyapunov, mostra-se, muitas vezes, inadequada



no caso particular de sistemas LPV. Primeiro, porque se assume, geralmente, que os parâmetros evoluem em algum politopo convexo, usualmente um hiper-retângulo [2,3], ou um simplex [4-6]. Infelizmente, tal suposição não é válida para a grande classe de sistemas LPV em que o conjunto de trajetórias paramétricas possíveis define domínios mais irregulares. Para contornar a eventual não convexidade do domínio paramétrico, esses métodos recorrem a algum tipo de técnica que estabeleça uma cobertura convexa como, por exemplo, a apresentada em [7]. No entanto, essas técnicas são suscetíveis de introduzir conservadorismos, uma vez que trajetórias não realistas são consideradas. Em segundo lugar, os métodos existentes, em geral, são capazes de tratar somente uma classe limitada de dependências paramétricas das matrizes do sistema, basicamente linear [4,5,6,8], afim [2,3,9] ou racional [10-12]. Consequentemente, esses métodos não são capazes de tratar diretamente dependências mais gerais encontradas em algumas aplicações de grande interesse prático como, por exemplo, os modelos quasi-LPV que aparecem nos campos aeroespacial e da mecatrônica. Para aplicar os métodos citados em tais problemas, recorre-se a algum tipo de esquema de linearização ou inscrição do modelo tratado em outro do tipo politópico, que são, reconhecidamente, procedimento conservadores.

Nessas mesmas linhas, algumas técnicas que apresentam os mesmos inconvenientes, mas que são de particular interesse para este trabalho por apresentarem exemplos numéricos com potencial para comparação de resultados, são as que propõem Função de Lyapunov (FL) afim-quadrática [7,13-15] e biquadrática [9].

Em [1], os autores propuseram um método ba-

seado em grade paramétrica para a análise de estabilidade de sistemas LPV que consegue tratar as dificuldades das técnicas clássicas de gradeamento do domínio paramétrico pelo uso da Transformada Haar (TH). Ou seja, o método se baseia na teoria wavelet Haar [16,17] para suplantiar as limitações dos esquemas de gradeamento clássicos que são relacionadas principalmente com a falta de garantia de estabilidade e desempenho para o domínio paramétrico contínuo. A novidade da abordagem proposta reside no uso da teoria wavelet para garantir a satisfação das restrições no domínio paramétrico inteiro, mesmo quando uma grade paramétrica arbitrariamente esparsa é considerada. Isso representa um grande avanço em relação aos métodos tradicionais de gradeamento, que não fornecem tal certificado sem a realização de testes de verificação suplementares.

No entanto, os resultados teóricos envolvidos em [1] não são sistemáticos nem construtivos de um ponto de vista numérico, requerendo manipulações algébricas específicas para cada sistema e para cada classe de função de parâmetro da matriz de estados. Mais recentemente, os autores de [18,19] introduziram novos algoritmos baseados em TH, derivados daqueles resultados, que são adequados para implementação prática e evitam manipulações analíticas e algébricas complexas quando uma ampla classe de dependências e domínios paramétricos irregulares são considerados.

Este artigo introduz novas caracterizações do tipo Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) para análise de desempenho robusto tipo de sistemas LPV com ganho  $\mathcal{L}_2$  garantido, por meio do uso de FL assintoticamente  $\mathcal{L}_2$ -quadráticas, com base nos algoritmos apresentados em [18,19]. Ou seja, o

novo método apresentado aqui estende as vantagens dos algoritmos de análise de estabilidade em [18] para a análise  $\mathcal{H}_\infty$ .

Para uma dada matriz real  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{M}^T$  denota a transposta,  $\|\mathbf{M}\|$  é a norma 2 induzida e  $\mathbf{M}^{pq}$  é o  $(p,q)$ -ésimo elemento.  $\mathbf{I}_n$  denota a matriz identidade de dimensão  $n$ .  $\mathbb{N}_{\geq 0}(\mathbb{R}_{\geq 0})$  e  $\mathbb{N}_+(\mathbb{R}_+)$  denotam, respectivamente, os números naturais (reais) não negativos e estritamente positivos. A notação  $\mathcal{S}(\mathbf{M}) \triangleq \mathbf{M} + \mathbf{M}^T$  é utilizada para simplificar expressões matemáticas longas.  $\mathcal{S}^n$  representa matrizes reais simétricas de dimensão  $n$ . Para  $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathcal{S}^n$ , a notação  $\mathbf{M} \succ \mathbf{N}$  ( $\mathbf{M} \succcurlyeq \mathbf{N}$ ) significa que  $\mathbf{M} - \mathbf{N}$  é positiva (semi)definida. Além disso, a notação  $-\mathbf{M} \preccurlyeq \mathbf{N}$  significa que ambas as desigualdades  $\mathbf{M} \preccurlyeq \mathbf{N}$  e  $-\mathbf{M} \preccurlyeq \mathbf{N}$  são satisfeitas.  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  denota o espaço de funções quadraticamente integráveis e  $\ell_2(\mathbb{N})$  denota o espaço de sequências quadraticamente somáveis. Para o mapeamento matricial  $\mathbf{M}: \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{M}(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n \times m})$  significa  $\mathbf{M}^{pq}(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ , para todo  $(p,q)$ . O produto interno de duas funções  $f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  é denotado por  $\langle f(\theta), g(\theta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)g(\theta)d\theta$ . Para dois mapeamentos  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\langle F(\theta), g(\theta) \rangle$  representa uma matriz cujo elemento  $(p,q)$  é dado por  $\langle F^{pq}(\theta), g(\theta) \rangle$ .

## 2. Fundamentação teórica

### 2.1 Sistemas LPV

A estrutura dos modelos LPV ficam em um campo intermediário entre a dinâmica linear e a não linear, sendo descrita por equações diferenciais lineares cujos dados dependem possivelmente de uma forma não linear dos parâmetros que variam no tempo e podem depender da dinâmica do próprio sistema [20].

Por meio de uma escolha apropriada dos vetores das variáveis de estado  $\mathbf{x}$ , da entrada  $\mathbf{u}$  e da saída  $\mathbf{y}$ , pode-se, em geral, obter um modelo não linear em relação ao vetor de estado, mas linear em relação a entrada, da seguinte forma [20]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\theta(t))\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\theta(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\theta(t))\mathbf{u}(t).\end{aligned}\quad (1)$$

As matrizes  $\mathbf{A}(\theta(t))$ ,  $\mathbf{B}(\theta(t))$ ,  $\mathbf{C}(\theta(t))$  e  $\mathbf{D}(\theta(t))$ , cujos elementos são supostos pertencer ao espaço  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ , são de dimensões compatíveis com as dimensões do vetor de estado, dos sinais de entrada e de saída, e definem completamente a dinâmica do sistema. O vetor de parâmetros  $\theta$  em (1) é suposto evoluir em um domínio compacto  $\Theta$ , com taxa de variação  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$  pertencente a um hiper-retângulo  $\Theta_d$ . Apesar de que a técnica apresentada neste artigo ser aplicada ao caso de dependência paramétrica vetorial, a fim de simplificar a apresentação, será considerado somente o caso de parâmetro escalar.

### 2.2 Análise de desempenho robusto $\mathcal{H}_\infty$

O ganho induzido pela norma  $\mathcal{L}_2$  de um sistema LPV modelado por (1), é descrito como a maior razão possível entre a norma  $\mathcal{L}_2$  do sinal de saída  $\mathbf{y}(t)$  e a norma  $\mathcal{L}_2$  do sinal de entrada  $\mathbf{u}$ , para um conjunto de sinais de entrada quadraticamente integráveis. O ganho  $\mathcal{L}_2$  pode ser representado pelo menor  $\eta$  que satisfaz

$$\int_0^\infty (\mathbf{y}(t)^T \mathbf{y}(t)) dt \leq \eta^2 \int_0^\infty (\mathbf{u}(t)^T \mathbf{u}(t)) dt \quad (2)$$

**Teorema 1** [19,21]: Para um sistema LPV, controlável, as seguintes sentenças são equivalentes:

a) O sistema é estritamente dissipativo em relação à razão de alimentação

$s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = -\eta \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \eta^{-1} \mathbf{y}^T \mathbf{y}$  e possui função de armazenamento quadrática dada por  $V(\theta, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\theta) \mathbf{x}$ .

b) O sistema de Desigualdade Linear Matricial Parametrizada (PLMI, do inglês *Parameterized Linear Matrix Inequality*) é satisfeito

$$\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{P}^T(\theta) > 0, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(\theta) + \mathbf{A}^T(\theta)\mathbf{P}(\theta) + \mathbf{P}(\theta)\mathbf{A}(\theta) & \mathbf{P}(\theta)\mathbf{B}(\theta) & \mathbf{C}^T(\theta) \\ \mathbf{B}^T(\theta)\mathbf{P}(\theta) & -\eta\mathbf{I} & \mathbf{D}^T(\theta) \\ \mathbf{C}(\theta) & \mathbf{D}(\theta) & -\eta\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (4)$$

c) O ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema (1) é limitado superiormente por  $\eta$ .

## 2.3 Transformada Wavelet Haar

A TH é uma Transformada Discreta Wavelet (TDW) que permite uma representação de dimensão infinita de funções quadraticamente integráveis [19,20]. Considere as funções escala ( $\phi$ ) e wavelet ( $\psi$ ) definidas como

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \theta < 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ \psi(\theta) &= \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \theta < 0,5, \\ -1, & \text{se } 0,5 \leq \theta < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Estas duas funções geram uma família de funções que são usadas para decompor e reconstruir um sinal ou uma função em  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ .

As funções  $\phi_k(\theta) \triangleq \phi(\theta - k)$  e  $\psi_{j,k}(\theta) \triangleq 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \theta - k)$  geram o espaço  $\mathcal{L}_2^0(\mathbb{R})$ , e a expansão de Haar de uma matriz de funções  $\mathbf{M}(\theta) \in \mathcal{L}_2^0(\mathbb{R}^{n \times n})$ , i.e.  $\mathbf{M}(\theta) = \mathbf{M}_{\Sigma_\infty}(\theta)$ , é dada por

$$\mathbf{M}_{\Sigma_\infty}(\theta) \triangleq \mathbf{M}_0 \phi_0(\theta) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{M}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta), \quad (6)$$

em que

$$\mathbf{M}_0 \triangleq \langle \mathbf{M}(\theta), \phi_0(\theta) \rangle \text{ and } \mathbf{M}_{j,k} \triangleq \langle \mathbf{M}(\theta), \psi_{j,k}(\theta) \rangle. \quad (7)$$

## 2.4 Limites superiores para resíduos matriciais

A TH de uma matriz de estado  $\mathbf{M}(\Theta)$ , é dada por  $\mathbf{M}_{\Sigma_J}(\Theta)$ , em que  $J$  é o nível de truncamento, e sua soma infinita pode ser reescrita como

$$\mathbf{M}(\theta) = \mathbf{M}_{\Sigma_\infty}(\theta) \triangleq \mathbf{M}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{M}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) \quad (8)$$

em que

$$\mathbf{M}_{\Sigma_J}(\theta(t)) = \mathbf{M}_0 \phi_0(\theta(t)) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{M}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta(t)) \quad (9)$$

e

$$\mathbf{M}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) = \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{M}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta) \quad (10)$$

é o resíduo. Note que  $\mathbf{M}_{\Sigma_J}(\theta)$  é constante por partes e pode ser interpretada como um tipo de discretização de  $\mathbf{M}(\Theta)$ . Sabe-se que na TH, os coeficientes de mais alta resolução são aqueles com mais baixo nível de energia. Logo, para  $J \gg 1$ , o resíduo  $\mathbf{M}_{\Sigma_\varepsilon}(\Theta)$  carrega informação pobre ou irrelevante e  $\mathbf{M}_{\Sigma_J}(\theta)$  é uma aproximação bastante precisa de  $\mathbf{M}(\theta)$ .

Em [1] os autores demonstram que existem funções reais positivas constantes por parte  $\{\alpha_m(\theta)\}_{m=0}^{2^J-1}$ , para qualquer  $J$ , tal que

$$\|\mathbf{M}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta)\| \leq \sum_{m=0}^{2^J-1} \alpha_m(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (11)$$

Contudo, o cálculo de  $\alpha_m$  para funções de dependência paramétrica geral envolvem análises não triviais. Esta dificuldade foi suplantada pelos algoritmos apresentados em [18,19] que calculam numericamente os limitantes superiores dos re-

síduos de matrizes com qualquer tipo de dependência paramétrica.

### 3. PILF via TH para desempenho robusto

Nesta seção, são apresentados novos algoritmos para a análise de desempenho para FL Independentes do Parâmetro (PILF, da sigla em inglês para *Parameter Independent Lyapunov Functions*).

#### 3.1 Expansão de Haar Truncada da matriz da dinâmica e limitantes superiores de resíduos

Para um nível de truncamento  $J$ , considere os intervalos contínuos  $\theta_{ji} = \frac{i-1}{2^{J+1}}, \frac{i}{2^{J+1}}$ , com  $\bigcup_{i=1}^{2^{J+1}} \{\theta_{ji}\} = \theta$ , e  $\mathcal{D}_{ji}^{\theta} \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \theta$  como o conjunto discreto dos  $2^{J+1}$  pontos equidistantes

$$\theta_i = \frac{2i-1}{2^{J+2}}, \quad \theta_i \in \theta_{ji} \quad (12)$$

Note que  $\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_i)$  em é uma matriz de funções constantes por partes cujos valores discretos das constantes são  $\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_i)$ ,  $\theta_i \in \mathcal{D}_{ji}^{\theta}$ .

Então, dados  $\mathbf{M}(\theta) \in \mathcal{L}_2^{\theta}(\mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $\Theta$  e  $J$ , é possível calcular numericamente o conjunto de matrizes discretas  $\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_i) \forall \theta_i \in \mathcal{D}_{ji}^{\theta}$ , e o conjunto de matrizes de resíduos máximos para cada intervalo correspondente  $\Theta_{ji}$ , da seguinte forma [18,19]:

**Passo 1:** Calcular  $\mathbf{M}(\theta_{\hat{\ell}})$  para valores discretos igualmente espaçados (congelados)  $\theta_{\hat{\ell}} = \hat{\ell}/2^{J^*}$  em uma grade paramétrica fina  $\mathcal{D}_{\hat{\ell}}^{\theta} \triangleq \{\theta_{\hat{\ell}}\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{J^*+1}} \subset \theta$ , onde  $J^*$  é escolhido suficientemente grande tal que  $\|\{\mathbf{M}^{pq}(\theta_{\hat{\ell}})\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{J^*+1}}\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \cong \|\mathbf{M}^{pq}(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R})}$ ,  $\forall pq$ , de forma a evitar perda de informação. O inteiro  $J^*$  deve ser escolhido, ao menos, maior do que  $J+2$  e, para um dados limiar  $\xi \ll 1$  um valor adequado

para  $J^*$  é alcançado quando o número  $2^{J^*} + 1$  de valores amostrados de  $\mathbf{M}^{pq}(\theta)$  é tal que  $\forall pq$ :

$$\left\| \{\mathbf{M}^{pq}(\theta_{\hat{\ell}})\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{(J^*+1)}+1} \right\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} - \left\| \{\mathbf{M}^{pq}(\theta_{\hat{\ell}})\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{J^*}+1} \right\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \leq \xi;$$

- **Passo 2:** Calcular a TH de  $\mathbf{M}(\theta_{\hat{\ell}})$  conforme (6), mas truncando o primeiro somatório em  $j=J$  e guardando os primeiros  $2^{J+1}$  coeficientes wavelet,  $J \gg J^*$ , para obter  $\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_{\hat{\ell}})$  e  $\mathbf{M}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_{\hat{\ell}}) = \mathbf{M}(\theta_{\hat{\ell}}) - \mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_{\hat{\ell}})$ ,  $\forall \theta_{\hat{\ell}} \in \mathcal{D}_{\hat{\ell}}^{\theta}$ , assim como em (8);
- **Passo 3:** Selecionar  $\tilde{\mathbf{M}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)$ ,  $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{ji}^{\theta}$ , como as matrizes cujos elementos são os máximos absolutos dos resíduos dos respectivos elementos de  $\mathbf{M}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_{\hat{\ell}})$  para cada um dos  $2^{J+1}$  intervalos  $\Theta_{ji}$  de tamanho  $2^{J^*-J-1}$ , i.e., para cada conjunto de valores  $(i-1)2^{J^*-J-1} + 1 \leq \hat{\ell} < (i)2^{J^*-J-1}$ ;
- **Passo 4:** Selecionar os valores  $\mathbf{M}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)$  nos pontos médios de  $\Theta_{ji}$  e calcular  $\|\mathbf{M}_{\Sigma_j}(\theta_i)\|$  e seus resíduos máximos para os intervalos correspondentes  $\|\tilde{\mathbf{M}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)\|$ ,  $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{ji}^{\theta}$ .

#### 3.2 Condições suficientes para desempenho $H_{\infty}$

Considere a representação em espaço de estados de um sistema LPV, com dependência paramétrica geral, múltiplas entradas e saídas em , em que os elementos das matrizes  $\mathbf{A}(\theta(t))$ ,  $\mathbf{B}(\theta(t))$ ,  $\mathbf{C}(\theta(t))$  e  $\mathbf{D}(\theta(t))$  são funções do parâmetro  $\theta(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  considerado escalar. Admite-se que tanto o parâmetro quanto a sua taxa de variação evoluem em domínios compactos, ou seja,  $\theta(t) \in \Theta$  e  $\dot{\theta}(t) \in \Theta_d$ , respectivamente. Dado um nível de truncamento  $J$ , obtêm-se os conjuntos de matrizes truncadas  $\mathbf{A}_{\Sigma_j}(\theta_i)$ ,  $\mathbf{B}_{\Sigma_j}(\theta_i)$ ,  $\mathbf{C}_{\Sigma_j}(\theta_i)$ ,  $\mathbf{D}_{\Sigma_j}(\theta_i)$  e os limites superiores correspondentes,  $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)\|$ ,  $\|\tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)\|$ ,  $\|\tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)\|$ ,  $\|\tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)\|$  calculados  $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{ji}^{\theta}$ .

O seguinte teorema apresenta uma condição suficiente baseada em um número finito de restrições



para a existência de uma FL independente do parâmetro tal que o sistema LPV em tenha ganho  $\mathcal{L}_2 < \eta$ .

**Teorema 2:** O sistema LPV em , supostamente controlável, tem ganho  $\mathcal{L}_2 \leq \eta$  se existirem  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  e  $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$  tal que o seguinte problema de otimização do nível de desempenho  $\eta \in \mathbb{R}_+$  tenha solução,  $\forall \theta_i \in \Theta_J \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2J+1} \subset \Theta$ :

$$\min_{(\gamma, \mathbf{P})} \eta$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{P} > 0 \quad (13)$$

$$\mathbf{P} - \gamma \mathbf{I}_n \leq 0 \quad (14)$$

$$\mathbf{N}_{\Sigma_J}(\theta_i) + 2(\gamma \|\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| + \|\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\|) \mathbf{I}_{n+m+p} < 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{N}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{C}_{\Sigma_J}^T(\theta_i) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_J}^T(\theta_i)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}_{\Sigma_J}^T(\theta_i) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta_i) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} e$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e

**Prova:** Conforme Teorema 1, o sistema LPV (1), controlável, tem ganho  $\mathcal{L}_2$  limitado superiormente por  $\eta$  se, e somente se, existir  $\eta \in \mathbb{R}_+$  e  $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$  e , tal que o conjunto de PLMI (3) e (4) seja satisfeito para todo  $\theta(t) \in \Theta$ .

As matrizes  $\mathbf{A}(\theta(t))$ ,  $\mathbf{B}(\theta(t))$ ,  $\mathbf{C}(\theta(t))$  e  $\mathbf{D}(\theta(t))$  em (1) , são substituídas em (4) por suas expansões de Haar truncadas e respectivos resíduos resultando em:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_J}^T(\theta)\mathbf{P} + \mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta)\mathbf{P} \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & \mathbf{C}_{\Sigma_J}^T(\theta) + \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta) \\ -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}_{\Sigma_J}^T(\theta) + \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta) \\ \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

Separando o conjunto de PLMI em duas partes, a primeira com as expansões truncadas e a segunda com os resíduos, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{C}_{\Sigma_J}^T(\theta) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_J}^T(\theta)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}_{\Sigma_J}^T(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta)\mathbf{P} & 0 & \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon}}^T(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{N}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{P}\mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) + \mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}^T(\theta)\mathbf{P} + \mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) + \mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}^T(\theta) < 0 \quad (18)$$

em que

$$\mathbf{N}_{\Sigma_J}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)) & \mathbf{P}\mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{C}_{\Sigma_J}^T(\theta) \\ \mathbf{B}_{\Sigma_J}^T(\theta)\mathbf{P} & -\eta\mathbf{I}_m & \mathbf{D}_{\Sigma_J}^T(\theta) \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) & -\eta\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) & \mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} e \quad \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Uma vez que  $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$ , a restrição implica  $\|\mathbf{P}\| \leq \gamma$ . Então,  $\forall \theta \in \Theta$ ,

$$PN_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) + N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}^T(\theta)P \leq \|PN_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) + N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}^T(\theta)P\| I_{n+m+p} \\ \leq 2\|P\| \|N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| I_{n+m+p} \leq 2\gamma \|N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| I_{n+m+p}. \quad (19)$$

Como os elementos de  $N_{\Sigma_j}(\theta)$  são, por construção, constantes por partes, então  $\forall \theta \in \theta_{J_i}$  e  $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\theta$ , para cada um dos  $2^{J+1}$  intervalos as relações a seguir são verdadeiras:

$$N_{\Sigma_j}(\theta) = N_{\Sigma_j}(\theta_i), \text{ com } \|N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| \leq \|\tilde{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \text{ e } \\ \|N_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta)\| \leq \|\tilde{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\| \quad (20)$$

Portanto,

$$N_{\Sigma_j}(\theta) + PN_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) + N_{\Sigma_{\varepsilon_1}}^T(\theta)P + N_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) + N_{\Sigma_{\varepsilon_2}}^T(\theta) \leq \\ N_{\Sigma_j}(\theta_i) + 2(\gamma \|\tilde{N}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| + \|\tilde{N}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\|) I_{n+m+p} < 0 \quad (21)$$

Desta forma, o conjunto de desigualdades implica que o conjunto de PLMI é uma condição suficiente para que o ganho  $\mathcal{L}_2 < \eta$ , no caso de uma variável de Lyapunov independente do parâmetro  $\mathbf{P}$ .

## 4. PDLF via TH para desempenho robusto

A utilização de FL Dependentes do Parâmetro (PDLF, da sigla em inglês para *Parameter Dependent Lyapunov Functions*) para a análise de desempenho pode reduzir o conservadorismo no Teorema 2. Considere inicialmente a seguinte função constante por partes construída por funções da base Haar [18]:

$$Q(\theta) = \sum_{h=0}^{2^{G+1}-1} Q_h \phi_h(2^{G+1}\theta) \quad (22)$$

onde  $Q_h \in \mathbb{S}^n$  e  $G \in \mathbb{N}$ , e a matriz candidata  $P(\theta)$  é dada por

$$P(\theta) \triangleq \int Q(\theta) d\theta \sum_{h=0}^{2^{G+1}-1} (Q_h \theta + \hat{Q}_h) \phi_h(2^{G+1}\theta) \quad (22)$$

onde  $Q_h$  e  $\hat{Q}_h \in \mathbb{S}^n$ ,  $h = 0, \dots, 2^{G+1} - 1$ , são variáveis a serem determinadas. A matriz candidata de Lyapunov  $P(\theta)$  em é afim por partes, mas não necessariamente continuamente diferenciável por partes. Assim sendo, algumas restrições devem ser impostas sobre as variáveis  $\hat{Q}_h$ .

**Lema 1:** [18] **C o n s i d e r e**  $Q_h \in \mathbb{S}^n$ ,  $h = 0, \dots, 2^{G+1} - 1$ , e  $\hat{Q}_0 \in \mathbb{S}^n$ . A função afim por partes  $P(\theta)$  em também é continuamente diferenciável por partes se e só se  $\hat{Q}_h$ ,  $h=0, \dots, 2^{G+1} - 1$ , for obtida recursivamente da seguinte forma

$$\hat{Q}_h = \sum_{r=1}^h (Q_{r-1} - Q_r) \frac{r}{2^{G+1}} + \hat{Q}_0. \quad (24)$$

Suponha agora  $\forall \theta(t) \in \theta$  e  $|\dot{\theta}(t)| \leq \rho \in \mathbb{R}_+$ . Dado um nível de truncamento  $J$ , obtêm-se os conjuntos de matrizes truncadas e os limites superiores correspondentes dos resíduos das matrizes do modelo em espaço de estado do sistema LPV em (1). Considere também  $P_{\Sigma_j}(\theta_i)$  e  $\tilde{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)$ , o truncamento e o resíduo da matriz candidata  $P(\theta)$ . Então o teorema a seguir estabelece uma condição suficiente baseada em um número finito de restrições para a existência de  $P(\theta)$ , tal que o ganho  $\mathcal{L}_2 < \eta$ :

**Teorema 3:** O sistema LPV em , suposto controlável, tem ganho  $\mathcal{L}_2 \leq \eta$  se existirem matrizes  $\hat{Q}_0 \in \mathbb{S}^n$ ,  $Q_h \in \mathbb{S}^n$ ,  $0 \leq h \leq 2^{G+1}-1$ , obtidas recursivamente conforme o Lema 1, e escalares  $\gamma_{J_i}, \gamma_{\varepsilon_i} > 0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $1 \leq i \leq 2^{J+1}$ , tal que o seguinte problema de otimização do nível de desempenho  $\eta \in \mathbb{R}_+$  tenha solução,  $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\theta \subset \theta$ :

$$\min_{(\gamma_{\varepsilon_i}, \gamma_{J_i}, \hat{Q}_0, Q_h)} \eta \\ \text{sujeito a } P_{\Sigma_j}(\theta_i) - \gamma_{\varepsilon_i} I_n > 0, \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{J_i} \mathbf{I}_n \leq 0, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\varepsilon_i} \mathbf{I}_n & \mathbf{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i) \\ \mathbf{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i) & \gamma_{\varepsilon_i} \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \geq 0, \quad (27)$$

$$\mathbb{Q}_{\pm}(\theta_i) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)) + 2\gamma_{J_i} \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p} + 2\gamma_{\varepsilon_i} (\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| + \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)\|) \mathbf{I}_{n+m+p} + 2\|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p} < 0 \quad (28)$$

em que

$$\mathbb{Q}_{\pm}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \pm \rho \mathbf{Q}(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & -\eta \mathbf{I}_m & 0 \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta_i) & -\eta \mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i) & \mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{B}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i) & \tilde{\mathbf{D}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i) & 0 \end{bmatrix}$$

**Prova:** Conforme Teorema 1, o sistema LPV (1), controlável, tem ganho  $\mathcal{L}_2$  limitado superiormente por  $\eta$  se, e somente se, existir  $\eta \in \mathbb{R}_+$  e  $\mathbf{P}(\theta) \in \mathbb{S}^n$ , tal que o conjunto de PLMI (3) e (4) seja satisfeito para todo  $\theta(t) \in \Theta$ .

Como  $\gamma_{\varepsilon_i} \in \mathbb{R}_+$  e  $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) \in \mathbb{S}^n$  então (25) implica em  $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) > 0$  e (26) implica em  $\|\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)\| \leq \gamma_{J_i}$  e . Além disso, (27) implica em  $\|\mathbf{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)\| \leq \gamma_{\varepsilon_i}$  e

$$-\gamma_{\varepsilon_i} \leq \mathbf{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) \leq \gamma_{\varepsilon_i}. \quad (29)$$

Ambos  $\mathbf{P}(\theta)$  e  $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta)$  são, por construção, afim por partes e constante por partes, respectivamente, então  $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) = \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)$  e  $\mathbf{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) = \mathbf{P}(\theta) - \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ ,  $\forall \theta \in \theta_{J_i}$  . A partir desta igualdade e das condições (25) e (26), tem-se que:

$$0 < \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{\varepsilon_i} \mathbf{I}_n \leq \mathbf{P}(\theta) \leq \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) + \gamma_{\varepsilon_i} \mathbf{I}_n.$$

Portanto,  $\mathbf{P}(\theta) > 0 \forall \theta \in \Theta$ , que corresponde a (3).

Uma vez que a taxa de variação  $\dot{\theta}$  é linear em (4), basta checar apenas os pontos extremos  $\pm \rho$  do conjunto  $\Theta_d$ , para todos os valores admissíveis de  $\theta$ . Analogamente ao Teorema 2, as matrizes do modelo em espaço de estado  $\mathbf{A}(\theta(t))$ ,  $\mathbf{B}(\theta(t))$ ,  $\mathbf{C}(\theta(t))$  e  $\mathbf{D}(\theta(t))$  em e a matriz de Lyapunov candidata

$\mathbf{P}(\theta)$ , são substituídas em (4) por suas expansões de Haar truncadas e respectivos resíduos, resultando em:

$$\mathbb{Q}_{\pm}(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) + \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}^T(\theta) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)) + \mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)) + (\mathbb{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)) < 0. \quad (31)$$

em que

$$\mathbb{Q}_{\pm}(\theta) = \begin{bmatrix} \pm \rho \mathbf{Q}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & -\eta \mathbf{I}_m & 0 \\ \mathbf{C}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_J}(\theta) & -\eta \mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta) & \mathbf{B}_{\Sigma_J}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & \mathbf{B}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & \mathbf{D}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbb{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os três últimos termos em podem ser substituídos por seus limites superiores:

$$\mathcal{S}(\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta) \mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta)) \leq 2\|\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta)\| \|\mathbb{M}_{\Sigma_J}(\theta)\| \mathbf{I}_{n+m+p}.$$

Como  $\mathbf{Q}(\theta)$  e  $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta)$  são constantes por partes,  $\forall \theta \in \theta_{J_i} \forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^{\theta}$ , as seguintes relações são verdadeiras para cada um dos  $2^{l+1}$  intervalos, i.e., para  $i = 1, \dots, 2^{l+1}$ .

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\theta_{-i}) \quad (33)$$

$$\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta) = \mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta_i), \text{ com } \|\mathbb{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)\| \leq \|\tilde{\mathbb{P}}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta_i)\|, \quad (34)$$

$$\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta) = \mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i), \text{ com } \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| \leq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \quad (35)$$

$$\|\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta)\| \leq \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_2}}(\theta_i)\| \quad (36)$$

$$2\|\mathbb{P}_{\Sigma_J}(\theta)\| \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| \mathbf{I}_{n+m+p} \leq 2\gamma_{J_i} \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p}, \quad (37)$$

$$2\|\mathbb{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)\| \|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta)\| \mathbf{I}_{n+m+p} \leq 2\gamma_{\varepsilon_i} \|\mathbb{M}_{\Sigma_{J_1}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p}, \quad (38)$$

$$2\|\mathbb{P}_{\Sigma_{\varepsilon}}(\theta)\| \|\mathbb{M}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta)\| \mathbf{I}_{n+m+p} \leq 2\gamma_{\varepsilon_i} \|\tilde{\mathbb{M}}_{\Sigma_{\varepsilon_1}}(\theta_i)\| \mathbf{I}_{n+m+p}. \quad (39)$$

Logo, utilizando as relações (37), (38), (39) pode-se reescrever (40) como,  $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\theta$ .

## 5. Exemplo numérico

Considere o seguinte modelo apresentado em [22]:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -1 - 1,3\theta & 0,5 - 20\theta \\ -1 + 2\theta & -2 - 10\theta \end{bmatrix},$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 1 + 2,2\theta & -4 + 0,5\theta \\ -1 - 6\theta & -1 - 5\theta \end{bmatrix},$$

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

em que  $\theta \in [0, 1]$  e  $\dot{\theta} \in [-10, 10]$ . Os autores de [22], em sua técnica, obtiveram os valores de  $\eta$  utilizando as seguintes noções de estabilidade: quadrática (Q), afim-quadrática (AQ) e bi-quadrática (BQ).

• Para aplicar os métodos descritos neste artigo, cujos principais resultados estão resumidos nos Teoremas 2 e 3, tomam-se os dados numéricos do sistema exemplo e seguem-se os seguintes passos:

• **Passo 1:** Para cada matriz do sistema, executar o Algoritmo da Seção 3.1, a fim de obter os

dados numéricos associados às suas expansões Haar truncadas, para um dado nível de truncamento  $J$  e  $G$ , conforme o caso;

• **Passo 2:** Escrever em código computacional Matlab as PLMI (14) a (16), do Teorema 2, ou as PLMI (26) a (29), do Teorema 3, conforme o caso;

• **Passo 3:** Resolver o problema de otimização dos Teoremas 2 ou 3, conforme o caso, utilizando um solver SDP do YALMIP 1.

Aplicando o Teorema 2, para diferentes níveis de truncamento  $J$ , e otimizando os valores de  $\eta$ , obtêm-se os resultados apresentados na **tabela 1**. Verifica-se que, conforme  $J$  aumenta, o valor de  $\eta$  tende a 7,5848, o mesmo valor obtido por [22] para  $\mathbf{P}$  independente de  $\theta$  (curva Q da Fig. 1). Calculando também a norma  $H_\infty$  para valores fixos do parâmetro, ponto a ponto, no intervalo  $\theta \in [0, 1]$ , encontra-se o valor máximo de  $\eta = 5,5798$ , conforme a Fig. 2, sendo assim menor que o valor de  $\eta = 7,5848$  obtido para uma FL independente do parâmetro, como era de se esperar. Na **tabela 1**, também são apresentadas as estimativas de  $\eta$  para as condições necessárias obtidas simplesmente testando as PLMI e do Teorema 1, para  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$  constante, sendo este o procedimento adotado pelo método LPV clássico de gradeamento do domínio paramétrico. Observa-se, pela reprodução dos resultados da **tabela 1** na **figura 1**, que estes testes resultam em limitantes inferiores (estimativas otimistas, não garantidas, para o limite superior da norma  $H_\infty$ ) para os valores de  $\eta$  fornecidos para as condições suficientes do Teorema 2 (estimativas pessimistas para o limite superior da norma  $H_\infty$ , cujo conservadorismo diminui assintoticamente).

Aplicando o algoritmo do Teorema 3, para

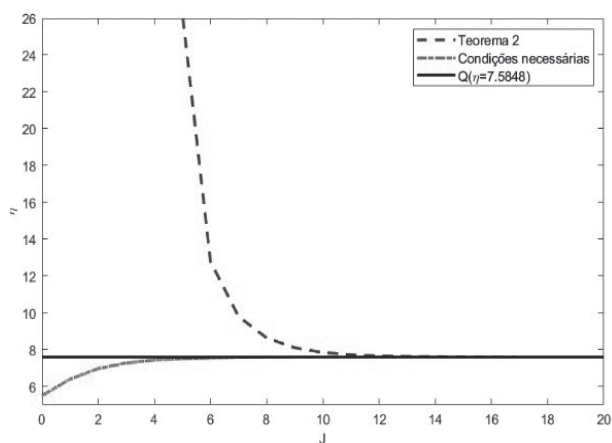
<sup>1</sup><https://yalmip.github.io/allsolvers/>

FL com  $\mathbf{P}(\theta)$  suportando uma dependência geral ( $\mathcal{L}_2Q$ ), para  $J = 13$ ,  $G = 0,1,2,3$ , com  $\rho \in [0, 10]$ , comparam-se com os gráficos de estabilidade quadrática (Q), afim-quadrática (AQ) e bi-quadrática (BQ) de [22] e têm-se os resultados representados na **figura 3**. Como era de se esperar, os resultados obtidos pelo método ( $\mathcal{L}_2Q$ ) são menos conservadores que os apresentados por [22]. Neste caso,  $\mathbf{P}(\theta)$  possui uma dependência paramétrica mais geral e menos restritiva, provendo maior grau de liberdade na busca de uma FL viável. Observa-se também que, à medida que  $G$  aumenta, as curvas  $\eta \times \rho$  tendem a se aproximar entre si, indicando a proximidade de uma saturação em  $G$  e da utilização da liberdade máxima oferecida pelo espaço  $\mathcal{L}_2$  para a busca de uma FL dependente do parâmetro. Pode-se verificar que todas as curvas  $\eta \times \rho$  obtidas neste trabalho e naquele de [22] têm, como limite inferior, o valor máximo da norma do sistema ( $\|H(\theta_i)\|_\infty$ ) para todos os pontos fixos do domínio paramétrico e, como limite superior, o valor obtido para  $\mathbf{P}$  constante que considera ilimitada a taxa de variação paramétrica, ou seja,  $\eta(\rho) \in [5,5798; 7,5848]$ . Esta é uma propriedade conhecida dos sistemas LPV.

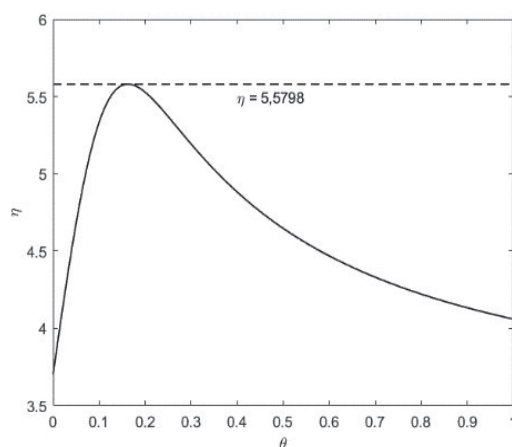
**Tab 1** – Valores de  $\eta$  para o Exemplo Numérico com FL independente do parâmetro.

$J$	$\eta$ - Teorema 2	$\eta$ - Cond. Suficiente
5	26,2483	7,5046
6	12,7782	7,5447
7	9,7900	7,5648
8	8,6264	7,5748
9	8,0945	7,5799
10	7,8374	7,5824
11	7,7106	7,5837
12	7,6475	7,5843
13	7,6161	7,5846

$J$	$\eta$ - Teorema 2	$\eta$ - Cond. Suficiente
14	7,6004	7,5848
15	7,5925	7,5848
16	7,5886	7,5848
17	7,5866	7,5848
18	7,5856	7,5848
19	7,5851	7,5848
20	7,5849	7,5848

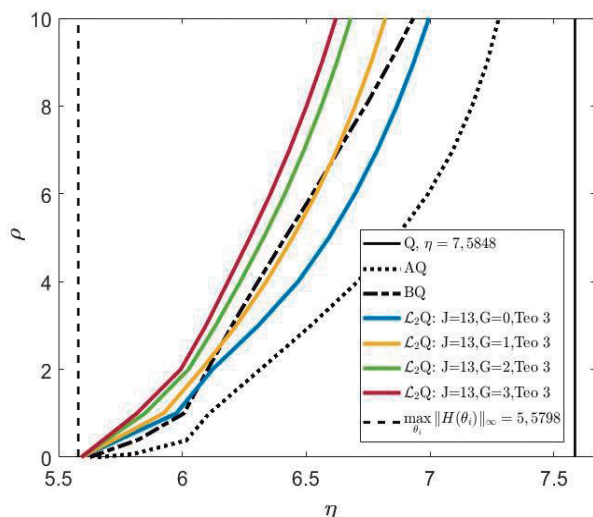


**Fig. 1** – Valores de  $\eta$  para o exemplo numérico com FL independente do parâmetro.



**Fig. 2** – Norma  $\eta$ , do sistema do exemplo numérico, obtida para valores fixos de  $\theta$ .





**Fig. 3** – Valores de  $\eta$  obtidos pelo uso do Teorema 3, para o Exemplo Numérico, com  $J = 13$  e diferentes valores de  $G$ ,  $\rho$  comparados com os resultados de [22].

## 6. Conclusão

Contrariamente aos métodos LPV clássicos de gradeamento do domínio paramétrico, que falham na garantia de estabilidade e desempenho

por se basearem em condições somente necessárias devido à característica inerente ao paradigma de Lyapunov de dimensionalidade infinita e presença de infinitas restrições, as técnicas de discretização do domínio paramétrico via TH, objetos deste estudo, garantem a estabilidade e o desempenho, pois se baseiam em condições suficientes. Essas condições são obtidas pois os resíduos do truncamento da expansão Haar das matrizes de estado e de Lyapunov não são negligenciados, mas substituídos nas PLMI por seus limitantes superiores.

Este artigo apresenta a extensão dos resultados sobre análise de estabilidade via TH exposta em [18], para a análise de desempenho robusto  $H_\infty$  de sistemas LPV. Sistemas exemplos com dependências paramétricas simples foram utilizados para permitir comparações dos resultados obtidos com técnicas de desempenho bi-quadrática e afim-quadrática encontrados na literatura, embora qualquer tipo de função de dependência no espaço possa ser considerada sem restrições adicionais.

## Referências bibliográficas

- [1] DE ARAUJO, L. O., PELLANDA P. C., GALDINO, J. F., SIMOES, A. M. Haar-Based Stability Analysis of LPV Systems. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol 60, no 1, pp. 192-198, 2015.
- [2] GAHINET, P. APKARIAN, P. CHILALI, M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3):436-442, Mar 1996.
- [3] BLIMAN, P. A. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. SIAM journal of Control and Optimization, 42:2016 - 2042, Jun 2003.
- [4] GEROMEL, J. C., COLANERI, P. Robust stability of time varying polytopic systems. Systems & Control Letters, 55(1):81-85, 2006.
- [5] OLIVEIRA, R. C. L., PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(7):1334-1340, 2007.
- [6] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A., VICINO, A. Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions. Automatica, 43(2):309 - 316, 2007.
- [7] YU, J., SIDERIS, A.  $H_1$  control with parametric Lyapunov functions. Systems & Control Letters, 30(2-3):57 - 69, 1997.
- [8] BLANCHINI, F.; MIANI, S. A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain

- linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3):641-647, Mar 1999.
- [9] TROFINO NETO, A., DE SOUZA, C. E. Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1303-1307, Aug 2001.
  - [10] SCHERER, C. W. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37:361-375, Mar 2001.
  - [11] WANG, F., BALAKRISHNAN, V. Improved stability analysis and gain-scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):39-50, 2002.
  - [12] CHESI, G. Sufficient and necessary LMI conditions for robust stability of rationally time-varying uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(6):1546-1551, Jun 2013.
  - [13] FERON, E., APKARIAN, P., GAHINET, P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041-1046, Jul 1996.
  - [14] HADDAD, W. M., BERNSTEIN, D. S. Parameter-dependent Lyapunov functions, constant real parameter uncertainty, and the Popov criterion in robust analysis and synthesis. 1. Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, pags. 2274-2279 vol.3, Dec 1991.
  - [15] KAPILA, V., HADDAD, W. M., ERWIN, R. S., BERNSTEIN, D. S. Robust controller synthesis via shifted parameter-dependent quadratic cost bounds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(7):1003-1007, Jul 1998.
  - [16] BURRUS, C. S., GOPINATH, R. A., GUO, H. Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. Prentice Hall, 1998.
  - [17] MALLAT, S. A Wavelet Tour of Signal Processing. Elsevier, 2009.
  - [18] BANDEIRA, P. T., PELLANDA, P. C., DE ARAUJO, L. O. New Haar-based algorithms for stability analysis of LPV systems. *IEEE Control Systems Letters*, 2(4):605-610, Oct 2018.
  - [19] BANDEIRA, P. T. Análise de Estabilidade e de Desempenho Robusto de Sistemas Lineares Variantes no Tempo com Dependência Paramétrica Geral Via Transformada Wavelet Haar. Tese de Doutorado, Instituto Militar de Engenharia, 2018.
  - [20] RUGH, W. J., SHAMMA, J. S. Survey paper research on gain scheduling. *Automatica*, 36:1401-1425, 2000.
  - [21] SCHERER, C. and WEILAND, S. Linear Matrix Inequalities in Control. Delft University of Technology and Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 2005. <<http://www.st.ewi.tudelft.nl/roos/courses/WI4218/lmi052.pdf>> acessado em 22/08/2019.
  - [22] DE OLIVEIRA, J., TROFINO NETO, A., DE SOUZA, C. E. Análise e síntese  $H_\infty$  para sistemas LPV. *Revista Controle & Automação*, 13(1):6-12, 2002.

# Geoinformação digital: uso e necessidades no Exército Brasileiro

Álex D Szrajbman\*, Luciano A T Brito

Instituto Militar de Engenharia

Praça General Tibúrcio, 80 - 22290-270 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

\*dave.alex@eb.mil.br

**RESUMO:** Este artigo avalia o uso e as necessidades dos militares da ativa das armas, quadros e serviços formados na Escola de Sargentos das Armas e Academia Militar das Agulhas Negras no que diz respeito ao uso da geoinformação em formato digital. O estudo foi realizado a partir de questionário on-line divulgado por meio de correio eletrônico enviado a todos os militares do público-alvo cujos endereços de e-mail estavam disponíveis no site do Departamento-Geral de Pessoal. Foi verificada clara preferência por fontes gratuitas abertas como Google Maps e Google Earth em detrimento dos produtos ofertados pela Diretoria de Serviço Geográfico (DSG) e foram identificadas oportunidades de melhorias dos meios adotados pela DSG.

**PALAVRAS-CHAVE:** Geoinformação. Web mapping. Levantamento de requisitos. Pesquisa de opinião.

**ABSTRACT:** This paper evaluates the uses and needs in regards to digital geoinformation by active duty military personnel graduated from the Army's Sergeant School and Agulhas Negras Military Academy. This study used an on-line questionnaire sent through e-mail to all military personnel in the target audience whose address was available through the Army's General Personnel Department's website. The preference for free open sources like Google Maps and Google Earth instead of the Army's Geographic Service's own products was clear and some improvement opportunities to DSG's products were identified.

**KEYWORDS:** Geoinformation. Web mapping. Requirement gathering. Survey.

## 1. Introdução

A Diretoria de Serviço Geográfico (DSG) do Exército Brasileiro (EB), juntamente ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), é encarregada da produção sistemática do mapeamento do Brasil. Ademais, é responsável por prover aos militares da linha bélica produtos geoespaciais adequados [1].

Para elevar a disponibilidade dos seus dados, a DSG criou o Banco de Dados Geográficos do Exército (BDGEx), permitindo consulta por metadados, *download* de produtos, navegação interativa, visualização baseada em grau de sigilo e credencial dos usuários etc. [2].

Entretanto, para usar os dados vetoriais disponíveis, o usuário – neste caso, o militar – pre-

cisa ter conhecimento de *softwares* de geoprocessamento, como o QGIS ou o ArcGIS. A despeito dos esforços da Diretoria em capacitar os militares de tropa, verifica-se a utilização do Google Earth e similares em detrimento dos dados disponibilizados no BDGEx [3], como será comprovado ao longo deste trabalho.

Este artigo busca estudar os padrões de uso e as necessidades dos militares da linha bélica no que diz respeito à utilização de dados geoespaciais<sup>1</sup> em meio digital, como parte de um estudo visando melhor adequar as formas de disponibilização de tais dados para esse público.

<sup>1</sup> Os termos “geoinformação”, “informação geoespacial” e “informação geográfica” serão utilizados como sinônimos ao longo deste trabalho.

## 2. Fundamentação teórica

Para compreender a realidade do militar no que diz respeito ao uso de geoinformação digital, procurou-se entender o contexto de disponibilização dessa informação em que se insere.

Internamente ao Exército Brasileiro, verificou-se normas, manuais e especificações técnicas. Externamente, foram estudados os sistemas empregados para a disponibilização e consumo de geoinformação digital, bem como os hábitos dos seus diferentes consumidores.

### 2.2 Realidade no Exército Brasileiro

No contexto da geoinformação, vigoram no EB:

- Manual de Campanha (MC) de Leitura de Cartas e Fotografias Aéreas, de 1980: não aborda geoinformação digital, mas ainda é empregado em escolas de formação militar [4].
- MC de Geoinformação: introduz conceitos e aplicação de geoinformação. Voltado para público leigo, aponta o acesso sob demanda via internet como importante para uso em nível tático [5].
- Normas para produção de geoinformação: as normas utilizadas pela DSG para a produção de geoinformação [6] [7] [8] [9] [10] não se aplicam ao presente estudo. Há, no entanto, uma proposta de simplificação da Estruturação de Dados Geoespaciais Vetoriais (EDGV) para uso no âmbito do EB, cuja forma reduzida de abordar as camadas de informação foi utilizada sem perdas [11] como referência.

Podem-se ressaltar, ainda, as formas como é realizada a distribuição de geoinformação produzida pela DSG para os militares de tropa. São

duas: por meio do BDGEx ou do contato direto com a Diretoria ou suas Organizações Militares Diretamente Subordinadas (OMDS).

### 2.2 Web mapping

Como nos demais ramos de distribuição de informação, as soluções para a divulgação e utilização de informação geográfica migraram para a *web* a partir dos anos de 1990. O conceito de *web mapping*, por ser abrangente, apresentou significados diferentes ao longo do tempo, evoluindo com as tecnologias e ferramentas disponíveis, e com os costumes de seus usuários [12].

Para compreender as possibilidades de *web mapping*, procurou-se entender o histórico da evolução das ferramentas disponíveis e dos costumes dos usuários. A taxonomia adotada, por ser a mais recente encontrada, foi a proposta em [13] e divide *web mapping* em nove eras:

- 1) Estática: mapas como imagens em HTML com *hyperlinks*, apenas para a obtenção de dados.
- 2) Dinâmica: usuários podem solicitar ao servidor camadas a serem visualizadas, permitindo pesquisa.
- 3) De serviços: arquitetura orientada a serviço, onde usuários – finais ou outros sistemas – solicitam dados e processamento por uma interface padronizada.
- 4) Interativa: interação cliente-servidor e servidor-cliente simultânea, com respostas mais rápidas ao permitir ao cliente receber dados enquanto visualiza e interage com o sistema.
- 5) Colaborativa: usuários contribuem com o fornecimento de dados ao servidor. O sistema passa de disseminador para também ser coletor de informações. Exemplos incluem OpenStreetMap ([openstreetmap.org](http://openstreetmap.org)) e Wikimapia ([wikimapia.org](http://wikimapia.org)).

- 6) Em globo digital: combinação das eras de serviços, interativa e colaborativa apresentado os dados em ambientes simulando a Terra em três dimensões. Um exemplo é o Google Earth ([www.google.com/earth/](http://www.google.com/earth/)).
- 7) Móvel: resulta do amplo uso de dispositivos móveis como *smartphones* e *tablets*, acessando mapas *on-line* e fornecendo sua localização em movimento.
- 8) Em nuvem: transfere parte ou todo o processamento ou armazenamento do cliente para a nuvem, aumentando a confiabilidade, estabilidade e escalabilidade do sistema. Permite-se coletar e processar os dados do usuário em tempo real e se adota o paradigma de *everything as a service* (tudo como um serviço).
- 9) Inteligente: funcionalidades e informações customizadas de acordo com o contexto do cliente – perfil, histórico, local e data/hora de acesso etc. – para fornecer informações mais relevantes ao usuário.

Atualmente, a Diretoria de Serviço Geográfico disponibiliza seus produtos através do BDGEx e de sua versão móvel, o BDGEx Mobile. O BDGEx permite [2]: consulta a metadados dos produtos geoespaciais armazenados, *download* de produtos, navegação interativa sobre as categorias de informações armazenadas, consultas espaciais por predicados topológicos, consulta a atributos de feições por apontamento, *download* de feições a partir de filtros do usuário, recorte de imagens e produtos matriciais para *download*, medições de área e distância, inserção de marcações possibilitando a vinculação de observações e visualização de produtos e camadas a partir de graus de sigilo e credenciais de usuário.

Além das funcionalidades listadas, o BDGEx disponibiliza serviços conforme o padrão OGC

(*Open Geospatial Consortium*, do inglês “Consórcio Geoespacial Aberto”). De acordo com a taxonomia adotada, o BDGEx apresenta características das eras de serviços, interativa e móvel, sendo a última ainda em fase de desenvolvimento (beta), por meio do BDGEx Mobile.

### 3. Método

Diversos são os métodos utilizados para a elicitação de necessidades de um grupo de usuários – entrevistas, *joint application development*, *brainstorming*, modelagem de casos de uso etc. [14] [15]. Para compreender os militares da linha bélica, optou-se pelo questionário, pois atinge o maior número de pessoas simultaneamente, abrange grande área geográfica, há maior liberdade devido à possibilidade de anonimato, evita influência do pesquisador e avalia uniforme e impessoalmente [16].

O questionário foi aplicado em duas etapas: um pré-teste para validar a completude e clareza dos questionamentos e um questionário de ampla divulgação, corrigido a partir das respostas do pré-teste e enviado a todos os militares da ativa formados na Academia Militar das Agulhas Negras (AMAN) e Escola de Sargentos das Armas (ESA), escolas que formam respectivamente os oficiais e praças de carreira (não temporários) da linha bélica, cujos endereços de correio eletrônico estavam disponíveis no site do Departamento-Geral de Pessoal (DGP) por meio da rede interna no Exército (EBnet).

#### 3.1 Questionário preliminar

O questionário preliminar, elaborado com a ferramenta Google Forms e enviado a um reduzido grupo de militares da linha bélica por inter-



médio de correio eletrônico e grupos de mensagens instantâneas, recebeu 43 respostas durante 30 (trinta) dias entre os meses de julho e agosto de 2018. As questões foram baseadas nas classes previstas na EDGV Sumarizada [17] [11] e experiências do autor no trato com a tropa.

### 3.2 Questionário de ampla divulgação

Diante das respostas dadas ao pré-teste, os questionamentos foram alterados quanto a sua clareza e opções incluídas às respostas sobre funcionalidades e camadas de informação desejáveis.

O questionário foi enviado a todos os oficiais e praças da ativa formados na AMAN e ESA através dos endereços de *e-mail* cadastrados na página do DGP acessada através da EBnet. No momento da coleta dos endereços (agosto de 2018), eram 22.893 militares oriundos da ESA e 10.819 da AMAN, totalizando 33.712 militares.

Com as respostas ao questionário final, definiram-se as necessidades e preferências dos militares de tropa do Exército Brasileiro. A representatividade das respostas obtidas foi analisada sob a luz da formulação descrita na seção sobre “Amostragem” deste artigo.

As funcionalidades e camadas de informação foram avaliadas em escala de zero a cinco, com crescente importância, pelos respondentes do questionário. As opções de feições foram escolhidas com base na EDGV Sumarizada, acrescidas de outras opções por clareza.

Para a seleção das principais informações e funcionalidades, consideraram-se os critérios mais votados com notas 4 ou 5 acumulando os primeiros 50% de votos como “fundamentais”; os critérios com os 30% seguintes como “desejáveis”; e os demais critérios como “baixa relevância”.

### 3.3 Amostragem

Como se pretende compreender os militares da linha bélica de carreira como um todo, optou-se por enviar um questionário *online* a todo o público-alvo pelas facilidades apresentadas pelo método. Como os militares receberam o e-mail aproximadamente ao mesmo tempo e permitiu-se um longo período para a resposta, considera-se que todos tiveram similar oportunidade para emitirem opiniões.

Diante do exposto e com base na distribuição obtida para o perfil dos respondentes, considera-se que a amostra desses indivíduos é aleatória simples [18].

Determinar a amplitude de uma amostra necessária para representar uma população infinita em caso de amostragem aleatória simples depende de diversos fatores, por meio da fórmula [19]:

$$n_0 = \frac{Z^2 p(1-p)}{e^2} \quad (1)$$

Onde  $n_0$  é a amplitude amostral para uma população infinita;  $Z$  é a abscissa que elimina uma área  $\alpha$  da curva normal padrão e  $1 - \alpha$  é o nível de confiança desejado;  $p$  é estimativa da proporção de presença para o atributo, sendo 50% o valor mais conservador, que implica no maior tamanho de amostra;  $e$  é o nível de precisão desejado.

Ou, corrigido para populações finitas:

$$n = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{n_0 - 1}{N}\right)} \quad (2)$$

Onde  $n_0$  é o valor calculado anteriormente e é a amplitude amostral para uma população com  $N$  elementos.

## 4. Resultados

Foram obtidas 2.755 respostas ao questionário de ampla divulgação de militares com patentes distribuídas em todo o espectro estudado – de 3º sargento a general. Conforme as equações apresentadas na seção 3.3, em uma população de 33.712 indivíduos, constata-se um nível de confiança superior a 99,9% e precisão de 2,99%.

Indicaram usar dados geoespaciais corriqueiramente, 86,3% dos respondentes, reafirmando a importância desses dados no dia a dia do militar, verificada em estudos anteriores [3].

As funções desempenhadas com maior uso de dados geoespaciais foram comandante de pelotão (20,1%), oficial de instrução e operações (S3 ou E3) (18,9%), comandante de companhia (14,3%), auxiliar de S3 (12,6%), chefe de viatura ou motorista (11,8%) e oficial de inteligência (S2 ou E2) (11,1%).

### 4.1 Análise de uso de geoinformação

Sobre a familiaridade com a DSG e com o BDGEx, 46,8% responderam não conhecer a Diretoria e 63,1% não conhecer o Banco de Dados, indicando oportunidade de melhoria na divulgação do Serviço Geográfico e seus produtos ao público-alvo. Também relevante neste contexto, 56,3% dos militares que alegaram conhecer o BDGEx informaram buscar dados geoespaciais exclusivamente em outras fontes. Motivos informados para tal incluem “outras opções são mais rápidas ou fáceis de usar” (88,3%), *site* difícil de utilizar (81,2%), dados antigos (79,2%), incompletos (66,4%) ou difíceis de utilizar após o *download* (58,4%).

Assim, verifica-se forte indício de que a interface

com o usuário é uma das principais componentes para a preferência de outras opções em detrimento ao BDGEx, além da importância da atualização dos dados, já apontada em estudos anteriores [3].

A principal fonte de dados foi o Google Maps, com 80% usando-o frequentemente e 15% ocasionalmente – as demais opções receberam até 8 e 27%, respectivamente, para essas frequências de uso. Os programas apontados como mais usados foram o Google Earth (67% de uso frequente e 25% de ocasional) e aplicativos móveis de navegação como Waze e Google Maps (72% e 21%). Programas como ArcGIS e QGIS – necessários para uso dos dados vetoriais do BDGEx – foram apontados como desconhecidos (64% e 67%) ou não utilizados (21% e 20%).

Diante das respostas obtidas, pode-se verificar clara preferência da população estudada por soluções livres – especificamente Google Maps e Google Earth – em detrimento das soluções oferecidas pela DSG.

### 4.2 Análise de demandas de geoinformação

Estabelecidos os hábitos dos militares na primeira parte do questionário, procurou-se compreender quais seriam as informações e funcionalidades requeridas em um sistema ideal específico para eles.

Há clara preferência por cartas-imagens ou ortofotocartas (69%) em relação às topográficas ou planialtimétricas (31%). Entretanto, visando atender o Exército como um todo, o ideal é permitir a escolha entre ambas, pois ambas apresentaram parcelas expressivas.

Conforme o critério enunciado no método deste estudo, as camadas de informação e funcionalidades foram classificadas conforme as **tabelas 4.1 e 4.2**.

wTab. 4.1 – Classificação das funcionalidades

Class.	Funcionalidades	4+5	% Acum
Fundamentais	Cálculo de distância	1746	7,4%
	Distância através de vias	1743	14,8%
	Coordenada de ponto	1734	22,1%
	Celular / tablet	1712	29,3%
	PDF / img p/ impressão	1676	36,4%
	Laptop / desktop	1649	43,4%
Desejáveis	Pesquisa nome rua / local	1604	50,2%
	Azimute entre pontos	1597	56,9%
	Calco digital	1535	63,4%
	Declividade do terreno	1527	69,9%
	Integração outros sistemas do EB	1509	76,3%
Baixa importância	Visada entre pontos	1463	82,5%
	Adicionar info para todos	1413	88,4%
	Adicionar info locais	1397	94,4%
	Adicionar info diversas	1334	100,0%

Tab. 4.2 – Classificação das camadas de informação

Class.	Camada de Informação	4+5	% Acum
Fundamentais	Vias de deslocamento	1766	4,4%
	Elemento viário	1621	8,5%
	Organização Militar (OM) do EB	1604	12,5%
	Vegetação	1601	16,5%
	Curvas de nível	1584	20,5%
	Pistas de pouso	1577	24,4%

Class.	Camada de Informação	4+5	% Acum
Fundamentais	Elemento infraestrutura	1575	28,4%
	Pontos notáveis	1546	32,2%
	Pontos cotados	1542	36,1%
	Área densamente edific	1539	40,0%
	Calhas de rios	1530	43,8%
	Corpos d'água	1507	47,6%
Desejáveis	Ferrovias	1489	51,3%
	Elementos hidrográficos	1477	55,0%
	Edificações diversas	1459	58,7%
	Elementos fisiográficos	1451	62,3%
	Limites especiais	1436	65,9%
	OM outras forças	1398	69,4%
	Depósitos	1382	72,9%
	Polícia Militar	1344	76,2%
	Bombeiros	1332	79,6%
Baixa importância	Elementos de transportes	1278	82,8%
	Limites legais	1277	86,0%
	Edif civis governo	1272	89,1%
	Delegacias	1265	92,3%
	Delimitações físicas	1164	95,2%
	Ocupação do solo	1050	97,9%
	Extração mineral	857	100,0%

## 5- Conclusão

Foram avaliados os padrões de uso de geo-informação digital por militares da linha bélica do Exército Brasileiro.

Os resultados mostram haver grande desconhecimento pela população estudada dos meios adotados para a divulgação de geo-informação pelo órgão do EB responsável por fornecer tal informação, bem como apontam oportunidades de melhoria de tais meios para

atender às necessidades da população estudada.

Foi possível, ainda, verificar e classificar opções de camadas de informação e funcionalidades importantes aos combatentes para o uso dessas informações. De tal maneira, é recomendável o estudo de formas de atender às necessidades encontradas para garantir a independência do Exército de atores externos, conforme preconizado na Estratégia Nacional de Defesa.

## Referências bibliográficas

- [1] EXÉRCITO BRASILEIRO. Regulamento da Diretoria de Serviço Geográfico. Secretaria-Geral do Exército, 2008. Disponível em: <<http://www.sgex.eb.mil.br/>>. Acesso em: 17/06/2018.
- [2] DSG. BDGEx - Generalidades. Geoportal do Exército Brasileiro, 2017. Disponível em: <<http://www.geoportal.eb.mil.br/portal/bdgex-1/bdgex-generalidades>>. Acesso em: 04/03/2018.
- [3] BRITO, L. A. T. O Uso da Inteligência Coletiva do EB na Cartografia de Interesse para a Força Terrestre. Rio de Janeiro. 2017.
- [4] EXÉRCITO BRASILEIRO. Manual de Campanha C 21-26 - Leitura de Cartas e Fotografias Aéreas. Biblioteca Digital do Exército, 1980. Disponível em: <<http://bdex.eb.mil.br/jspui/handle/123456789/325>>. Acesso em: 03/08/2018.
- [5] EXÉRCITO BRASILEIRO. Manual de Campanha EB20-MC-10.209 - Geoinformação. Biblioteca Digital do Exército, 2014. Disponível em: <<http://bdex.eb.mil.br/jspui/bitstream/123456789/85/1/EB20-MC-10.209.pdf>>. Acesso em: 12/09/2018.
- [6] DSG. Especificação Técnica para Produtos de Conjuntos de Dados Geoespaciais (ET-PCDG) 2ª Edição. Geoportal do Exército Brasileiro, 2016. Disponível em: <<http://www.geoportal.eb.mil.br/index.php/inde2?id=134>>. Acesso em: 13/08/2018.
- [7] DSG. Especificação Técnica para o Controle de Qualidade de Produtos de Conjuntos de Dados Geoespaciais (ET-CQDG). Geoportal do Exército Brasileiro, 2016. Disponível em: <<http://www.geoportal.eb.mil.br/index.php/inde2?id=142>>. Acesso em: 13/08/2018.
- [8] CONCAR. Especificação Técnica para a Aquisição de Dados Geoespaciais Vetoriais v2.1.3 2ª Edição. Geoportal do Exército Brasileiro, 2011. Disponível em: <<http://www.geoportal.eb.mil.br/index.php/inde2?id=140>>. Acesso em: 09/08/2018.
- [9] CONCAR. Especificação Técnica para a Estruturação de Dados Geoespaciais Vetoriais v2.1.3. Geoportal do Exército Brasileiro, 2010. Disponível em: <<http://www.geoportal.eb.mil.br/index.php/inde2?id=139>>. Acesso em: 09/08/2018.
- [10] EXÉRCITO BRASILEIRO. Manual Técnico T34-700 Normas para o emprego dos Símbolos. Biblioteca Digital do Exército, 2002. Disponível em: <<http://bdex.eb.mil.br/jspui/handle/123456789/76>>. Acesso em: 09/08/2018.
- [11] 1º CGEO. Relatório Técnico nº 10/2017 - SDT/1º CGEO. 1º Centro de Geoinformação. Porto Alegre. 2017.
- [12] VEENENDAAL, B. et al. What is Web Mapping Anyway? The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Wuhan, China, v. 42, p. 155-160, setembro 2017.
- [13] VEENENDAAL, B.; BROVELLI, M. A.; LI, S. Review of Web Mapping: Eras, Trends and Directions. International Journal of Geo-Information, v. 6, n. 317, outubro 2017.
- [14] RAMDHANI, M. A. et al. Requirements Elicitation in Software Engineering. International Journal of Engineering & Technology, v. 7, n. 2.29, p. 772-775, Maio 2018. ISSN DOI: 10.14419/ijet.v7i2.29.14254.
- [15] ESCALONA, J.; KOSH, N. Requirements Engineering for Web Applications - A Comparative Study. Journal of Web Engineering, v. 2, n. 3, p. 193-212, 2004.
- [16] MARCONI, M. D. A.; LAKATOS, E. M. Fundamentos de Metodologia Científica. 5. ed. São Paulo: Atlas S. A., 2003.
- [17] DSG. Proposta EDGV Sumarizada. Diretoria de Serviço Geográfico. Brasília. 2017.
- [18] O'LEARY, J. L.; ISRAEL, G. D. The Savvy Survey #3: Successful Sampling. Department of Agricultural Education and Communication, UF/IFAS Extensio. Gainesville, FL. 2016. (AEC393).
- [19] ISRAEL, G. D. Determining Sample Size. Institute of Food and Agricultural Sciences, University of Florida. Gainesville. 2003. (PEOD6). x

# Eficiência energética de um veículo elétrico

Gabriel O F Briguiet, João P Q Caldas, Lucas A G Lima, Vitor Santoro Santiago\*

Instituto Militar de Engenharia

Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil.

\* santoro@ime.eb.br

**RESUMO:** Neste trabalho é analisada a dinâmica longitudinal de um veículo elétrico a partir de um modelo de seu trem de força, visando a determinação de parâmetros que otimizem sua eficiência energética. Para tal, é desenvolvida uma descrição analítica baseada nas leis fundamentais da física, a qual permite avaliar o desempenho energético do veículo com a utilização de ferramentas computacionais, apontando inter-relação de aspectos a serem otimizados, tal qual o perfil de velocidade a ser adotado pelo motorista do veículo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Eficiência energética, veículo elétrico, dinâmica longitudinal

**ABSTRACT:** This paper analyzes the longitudinal dynamics of an electric vehicle from a model of its power train, aiming to obtain parameters that optimize its energy efficiency. To this end, an analytical description based on the fundamental laws of physics is developed, which allows to evaluate the vehicle energy performance using computational tools, pointing out the interrelationship of aspects to be optimized, such as the speed profile to be adopted by the driver of the vehicle.

**KEYWORDS:** Energetic efficiency, electric vehicle, longitudinal dynamics

## 1. Introdução

O desenvolvimento de projetos na área de eficiência energética é de crescente importância no século XXI, tanto no aspecto econômico quanto no ambiental. O presente artigo desenvolve um tema de grande interesse para a sociedade, oferecendo uma ferramenta para modelar a eficiência energética de um veículo elétrico, contribuindo para economia de energia e para a diminuição de poluentes.

### 1.1 Motivação

O artigo em tela tem como objetivo a elaboração de um projeto conceitual de um veículo elétrico, através da modelagem em diagrama

de blocos de seu sistema de propulsão e de sua dinâmica veicular longitudinal, realizando a simulação do desempenho de acordo com as equações físicas dos fenômenos envolvidos. É utilizado o software *Simulink* para a modelagem e simulação do fluxo de potência, estabelecendo uma relação de causalidade e efeito no sistema dinâmico.

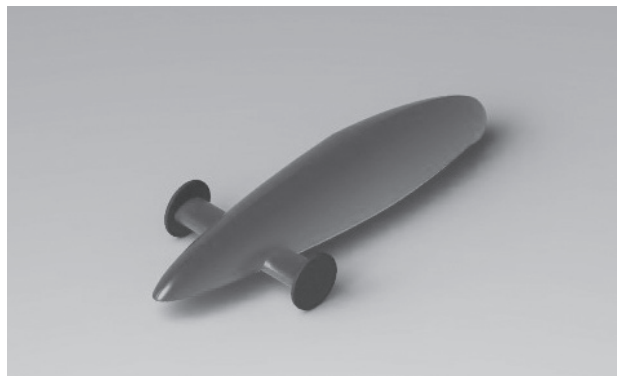
O modelo desenvolvido permite analisar o consumo energético do automóvel decorrente de uma sequência de comandos pré-estabelecida. Como resultado obtém-se um perfil de velocidades a ser adotado pelo condutor, o qual otimiza o consumo de energia.

### 1.2 Concepção do veículo elétrico

O veículo a ser modelado foi concebido para



participar da *Shell Eco Marathon*, uma competição que avalia a eficiência energética de protótipos veiculares. A sua concepção inicial prevê que o mesmo seja tri-apoiado, com duas rodas no eixo dianteiro e uma roda traseira, com tração traseira e esterçamento dianteiro, conforme **figura 1**.



**Fig. 1** – Modelo base do veículo em Solidworks

## 2. Modelo matemático

Para o início do trabalho, é necessária a elaboração de modelos e equações para os fenômenos físicos envolvidos no problema em estudo, tal como a dinâmica longitudinal veicular, o motor elétrico e a bateria.

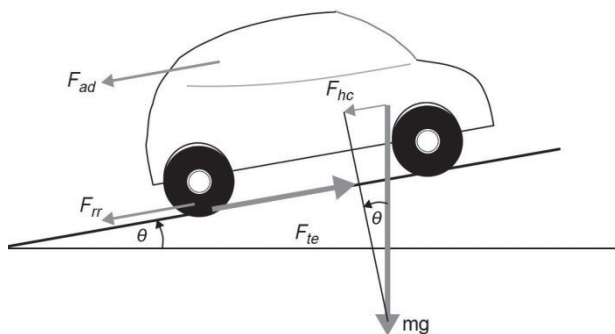
### 2.1 Dinâmica veicular

A modelagem de um veículo requer primeiramente uma equação para a força trativa a ser empregada, tal que esta força satisfaça as seguintes condições: superar a força de resistência ao rolamento; superar a força de resistência aerodinâmica; prover a força necessária para vencer a componente da força peso que age paralela a um aclive; fornecer aceleração ao veículo quando necessário; e fornecer o torque necessário de operação aos componentes rotativos [1]. Para a-

tender aos requisitos de projeto, o veículo deve ter condições de superar as forças resistivas presentes.

#### 2.1.1 Forças resistivas

A ação de forças resistivas ao movimento devem ser definidas e explicitadas. Para tal, as forças envolvidas e seus equacionamentos correspondentes são baseados em um veículo de massa  $m$ , a uma velocidade  $v$ , submetido a aceleração local da gravidade  $g$  e subindo uma rampa de ângulo  $\theta$  com a horizontal. Tais forças são retratadas na **figura 2**, como se segue.



**Fig. 2** – Forças atuantes no veículo [1] - adaptada

#### Força de resistência ao rolamento

A resistência ao rolamento é ocasionada, principalmente, pela deformação dos pneus, sendo considerada aproximadamente constante para baixas velocidades, e proporcional à força normal nas rodas do veículo, com se segue:

$$F_{rr} = \mu_{rr} mg \cos\theta \quad (1)$$

onde  $\mu_{rr}$  é o coeficiente de resistência ao rolamento, o qual pode ser considerado como constante para o caso em estudo pelo fato do veículo não atingir altas velocidades [2, 3].

### Força de arrasto aerodinâmico

A força de arrasto aerodinâmico é resultado da resistência, de origem viscosa e de pressão, imposta enquanto o veículo atravessa o ar; ela é função da área frontal, forma externa, condições do ar e velocidade do veículo. Sua determinação, desprezando-se os efeitos viscosos, pode ser realizada por:

$$F_{ad} = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \quad (2)$$

onde  $\rho$  é a densidade do ar local,  $A$  é a área frontal,  $v$  é a velocidade e  $C_d$  é o coeficiente de arrasto, que depende do formato do corpo e o número de Reynolds correspondente.

### Força de resistência à subida de rampa

A força necessária para a subida de uma rampa é definida pela componente da força peso que age ao longo do percurso, paralelamente à rampa, e é calculada por:

$$F_{hc} = m g \sin \theta \quad (3)$$

### Força de aceleração

Para o caso de variação na velocidade do veículo, uma força para gerar uma aceleração linear é necessária. Seu cálculo, proveniente da segunda lei de Newton, é dado por:

$$F_{ad} = m a \quad (4)$$

onde  $a$  é a aceleração linear do veículo. No entanto, os componentes rotativos também devem ser acelerados, tal que a força para gerar aceleração angular para cada componente deve ser considerada e é relevante em veículos leves [4]. Essas for-

ças podem ser refinadas e expressas por:

$$F_{\omega am} = I_m \frac{G^2}{\eta_g r^2} a \quad (5)$$

$$F_{\omega a \omega} = I_\omega \frac{1}{r^2} a \quad (6)$$

onde  $I_m$  é o momento de inércia do rotor do motor,  $G$  é a razão de transmissão do motor,  $\eta_g$  é o rendimento do sistema de transmissão,  $r$  é o raio da roda,  $I_\omega$  o momento de inércia das rodas.

Por fim, a força de aceleração será uma composição das forças citadas acima, tal que:

$$F_{ta} = m a + I_m \frac{G^2}{\eta_g r^2} a + I_\omega \frac{1}{r^2} a \quad (7)$$

## 2.1.2 Esforço trativo

Uma vez estabelecidas as forças resistivas, é necessário determinar o esforço trativo necessário para que ocorra o movimento desejado [5]. O esforço trativo em cada instante é a soma de todas as forças apresentadas anteriormente, tal que:

$$F_{te} = F_{rr} + F_{ad} + F_{hc} + F_{ta} \quad (8)$$

onde  $F_{rr}$  é a força de resistência ao rolamento, expressa pela equação (1),  $F_{ad}$  é a força de arrasto aerodinâmico, expressa pela equação (2),  $F_{hc}$  é a força de resistência à rampa, expressa pela equação (3) e  $F_{ta}$  é a força de aceleração, expressa pela equação (7).

Expandindo os termos e estabelecendo a relação diferencial, temos

$$\begin{aligned} \frac{G}{r} T = & \mu_{rr} m g \cos \theta + \frac{1}{2} \rho A C_d v^2 + m g \sin \theta + \\ & + \left( m + I_m \frac{G^2}{\eta_g r^2} + I_\omega \frac{1}{r^2} \right) \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (9)$$

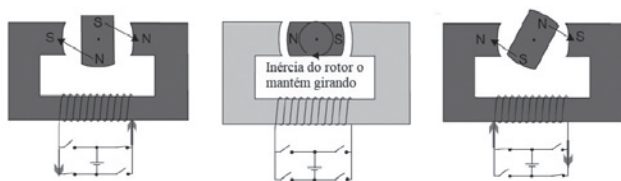
onde  $T$  é o torque desenvolvido pelo motor elétrico em um dado instante.

## 2.2 Motor elétrico BLDC

### 2.2.1 Princípios básicos

O motor elétrico é responsável por converter energia elétrica em energia mecânica, sendo a única fonte de propulsão em um veículo elétrico. O motor comutável com controlador, corrente contínua e sem escovas, comumente conhecido como BLDC, foi escolhido para a aplicação neste trabalho por apresentar as seguintes vantagens: provém alto torque em baixas velocidades, elevada potência instantânea, torque com menos oscilações e anomalias, controle mais simples do que nos motores de indução e maior eficiência do que seu correspondente com escovas [5].

O motor sem escovas BLDC é composto, basicamente, por um rotor e um estator. Seu rotor é um ímã permanente, enquanto que o estator é envolto por uma bobina. A corrente que flui através da bobina estabelece um campo magnético. A interação entre esse campo magnético induzido no estator e o campo magnético do ímã do rotor produz uma força magnética que produz o torque. Para que a força magnética esteja sempre no mesmo sentido da rotação desejada, é necessário um circuito para inverter a polaridade do estator, conforme ilustrado na **figura 3**.



**Fig. 3** – Funcionamento do motor BLDC [1] - adaptada

Comparativamente, no motor com escovas, o rotor recebe a corrente elétrica, enquanto que o estator é permanentemente imantado. Nesse caso, as escovas fazem, mecanicamente, o papel de inverter a polaridade, ocasionando uma perda de eficiência por conta do atrito. A potência mecânica fornecida pelo motor ao veículo é função do torque produzido ( $N.m$ ) e de sua velocidade angular ( $rad/s$ ), de modo que:

$$P_{mec} = T\omega_m \quad (10)$$

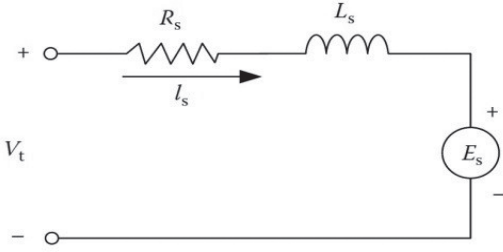
Por outro lado, a potência elétrica fornecida ao motor elétrico é função da voltagem a ele alimentada e da corrente elétrica que o atravessa, de modo que:

$$P_{ele} = V_t I_s \quad (11)$$

### 2.2.2 Análise de desempenho

A análise de um motor BLDC será baseada nas hipóteses de motor não saturado. As resistências, indutâncias e auto-indutâncias dos enrolamentos do estator são iguais, os semicondutores de potência empregados no inversor são ideais e perdas de ferro desprezíveis [6].

Um circuito simplificado de fase única é apresentado na **figura 4**. Nele,  $V_t$  é a voltagem da fonte de alimentação,  $R_s$  é a resistência do enrolamento,  $L_s$  é a indutância do enrolamento e  $E_s$  é a força contra-eletromotriz induzida no circuito devido à rotação do rotor.



**Fig. 4** – Circuito simplificado de fase única [6] - Adaptada

Baseando-se no circuito equivalente apresentado para o motor BLDC, extraem-se as equações 12 a 15:

$$V_t = R_s I_s + L_s \frac{dI_s}{dt} + E_s \quad (12)$$

$$E_s = k_E \omega_r \quad (13)$$

$$T_e = k_T I_s \quad (14)$$

$$T_e = T_L + J \frac{d\omega_r}{dt} + B \omega_r \quad (15)$$

onde  $k_E$  é a constante da força contraeletromotriz,  $\omega_r$  é a velocidade angular do rotor,  $k_T$  é a constante de torque,  $T_L$  é o torque resistivo,  $T_e$  é o torque fornecido pelo motor,  $B$  é o coeficiente de resistência viscosa,  $L_s$  é a indutância do enrolamento e  $J$  é o momento de inércia do rotor [6, 7].

Visando obter equações algébricas que permitam o controle do motor BLDC, aplica-se a Transformada de Laplace nas equações diferenciais 12 a 15 chegando-se a:

$$V_t(s) = (R_s + sL_s)I_s + E_s \quad (16)$$

$$E_s(s) = k_E \omega_r(s) \quad (17)$$

$$T_e(s) = k_T I_s(s) \quad (18)$$

$$T_e(s) = T_L(s) + (B + sJ)\omega_r(s) \quad (19)$$

O interesse maior para a dinâmica veicular reside em uma análise do torque líquido produzido pelo motor, de modo que seja respeitada a relação da causalidade entre velocidade do veículo em função da força resultante sobre o mesmo. Logo, a função de transferência do motor pode ser dada por:

$$T_e(s) = \frac{k_T}{(R_s + sL_s)} V_t(s) - \frac{k_T k_E}{(R_s + sL_s)} \omega_r(s) \quad (20)$$

## 2.3 Bateria

Em um veículo elétrico, a bateria é a fonte de energia que alimenta um motor elétrico. Seu funcionamento se baseia na conversão de energia química nela armazenada em energia elétrica, por meio de reações químicas. Os principais tipos de bateria utilizados em veículos elétricos ou híbridos são chumbo-ácido, níquel-cádmio (NiCd), hidreto metálico de níquel (NiMH), íon-lítio (Liion), polímero-lítio, sódio-enxofre (NaS), e bateria zinco-ar. Cada composição química determinará uma voltagem da célula da bateria [5]. Dentre os tipos de bateria citados anteriormente, as de íon-lítio são amplamente utilizadas na propulsão de veículos elétricos como o analisado neste trabalho, por apresentar altas eficiência e energia específica. Apresentam uma voltagem de 3,6 V por célula.

Um parâmetro importante na análise de uma bateria é a sua capacidade, ou seja, a carga que ela consegue armazenar e posteriormente fornecer ao motor. Essa capacidade é usualmente especificada em ampere-hora (Ah), entretanto, a intensidade da corrente de descarga influencia em sua capacidade. Um exemplo disso é observado na **figura 5**.

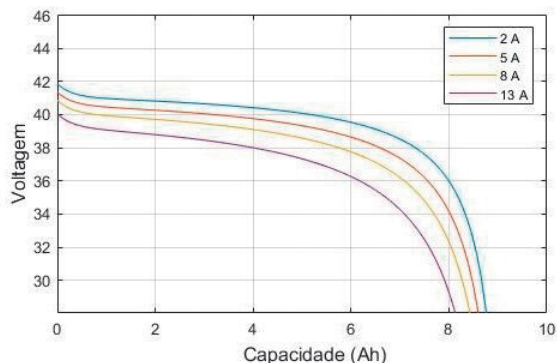


Fig. 5 – Voltagem x Capacidade (2, 5, 8 e 13 A)

Neste trabalho será analisada somente a descarga da bateria, considerando a aplicação em somente um ciclo de utilização do veículo. Estudando uma descarga da bateria a partir da carga completa, percebe-se que inicialmente o descarregamento não é linear, dando origem à denominada zona exponencial. Na **figura 6**, observa-se a diferença entre as áreas de comportamento exponencial e nominal da bateria. Após o final da área nominal, a voltagem fornecida pela bateria cai abruptamente.

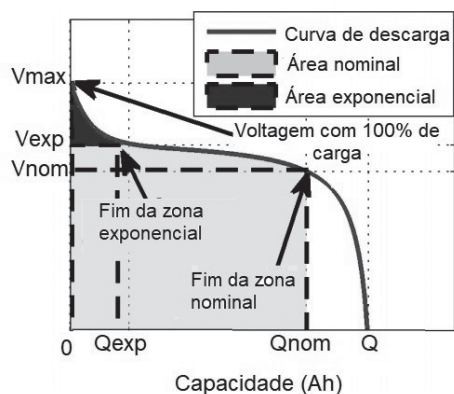


Fig. 6 – Curva de descarga da bateria sob corrente nominal [8] – Adaptada

A quantificação da energia que sai da bateria é feita através da potência elétrica solicitada, que

depende da potência mecânica requerida pelo motor para movimentar o veículo.

$$E = \int P_{ele} dt \quad (21)$$

Para que a bateria não se descarregue por completo, deve-se monitorar o estado de carga (SoC, “State of Charge”), o qual relaciona a carga restante na bateria com a carga total ( $Q$ ), considerando-se uma corrente de descarga  $i(t)$ . Ele é calculado como se segue:

$$SoC = 100 \left( 1 - \frac{1}{Q} \int_0^t i(t) dt \right) \quad (22)$$

### 3. Modelo numérico

Diagramas de blocos constituem uma maneira de retratar sistemas dinâmicos, proporcionando uma compreensão facilitada destes frente às respectivas representações puramente matemáticas. Através da representação característica dos componentes de um sistema dinâmico e suas funções associadas, os diagramas de bloco permitem observar com maior clareza o fluxo de sinais em um sistema real [9]. Para sistemas complexos, a concepção em diagrama de blocos esclarece o entendimento do fenômeno físico, elucidando os efeitos de cada entrada no sistema. Por esta razão, este foi o método selecionado para fazer a análise de desempenho do veículo elétrico em estudo. Nesse contexto, utilizou-se o *Simulink* (versão R2018a) para modelar cada componente de interesse e computar diversos parâmetros para o percurso simulado.

Conforme anteriormente descrito, o veículo deve superar as forças de resistência ao movimento, de modo a atingir a aceleração e velocidade almejadas. Dado que o percurso a ser percorrido pelo veículo



na competição *Shell Eco Marathon* ocorrerá em asfalto nivelado, o ângulo de rampa atribuído será de 0°.

### 3.1 Modelagem da dinâmica veicular

A dinâmica veicular será resultado das forças resistivas previamente elencadas e da aceleração demandada pelo piloto através do perfil de velocidade desejado. No âmbito desta simulação, a aceleração será uma entrada para o bloco de dinâmica veicular, o qual calculará o somatório das forças de aceleração e de resistência ao movimento, e fornecerá a força trativa necessária  $F_{te}$  para se obter o desempenho pretendido. A **figura 7** exhibe o esquema do bloco em questão.

### 3.2 Modelagem do motor elétrico

Para o emprego do modelo do motor elétrico na dinâmica veicular é necessário que o motor forneça um torque líquido para uma dada velocidade do veículo. Desse modo, é possível calcular a aceleração instantânea do automóvel, permitindo o cálculo da nova velocidade do veículo, realimentando o subsistema do motor com a velocidade real do carro. A equação 20 permite

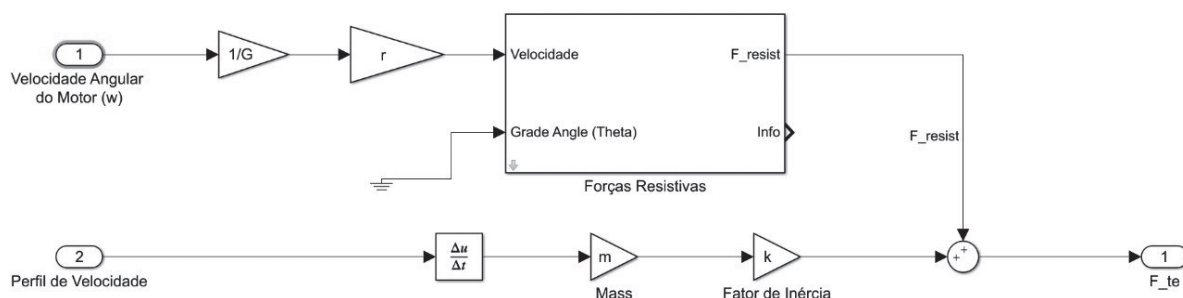
calcular o torque fornecido pelo motor elétrico submetido a uma voltagem  $V_l$  e velocidade  $w_r$ . A **figura 8** apresenta o diagrama de blocos para controle do motor elétrico BLDC.

### 3.3 Modelagem da bateria

A fim de simular o comportamento da bateria ao longo do tempo de funcionamento do veículo, utilizou-se o modelo de bateria de íon-lítio da biblioteca elétrica do *Simscape*, onde a voltagem da bateria é determinada por:

$$V_{batt} = E_o - R \cdot i - \frac{Q}{Q - it} \cdot i^* - k \cdot \frac{Q}{Q - it} \cdot it + A \cdot e^{-B \cdot it} \quad (23)$$

onde  $E_o$  é a voltagem de circuito aberto da bateria,  $Q$  é a capacidade em  $Ah$ ,  $K$  é a constante de polarização,  $R$  a resistência interna da bateria,  $it = \int i \cdot dt$  é a carga total retirada da bateria,  $i$  é uma corrente filtrada, que passa pela resistência de polarização. Os parâmetros  $A$  e  $B$  são, respectivamente, a amplitude da zona exponencial (em volts) e uma constante de tempo da zona exponencial.



**Fig. 7** – Bloco dinâmica veicular

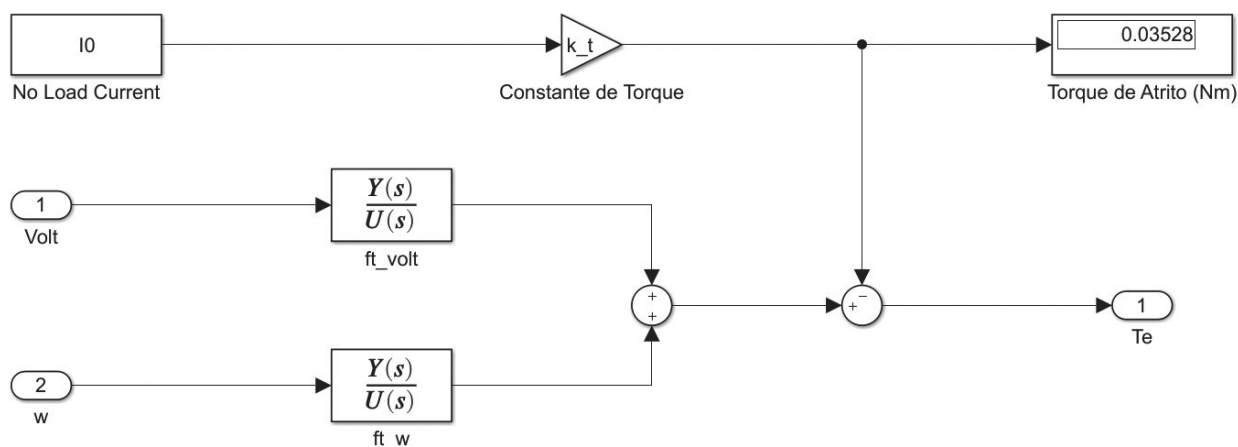
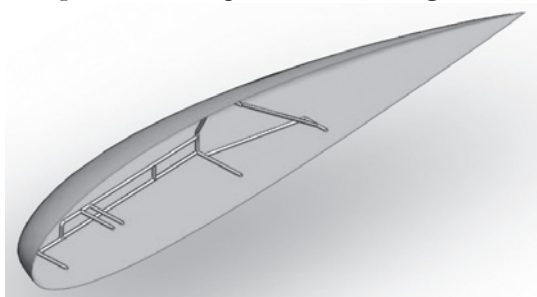


Fig. 8 – Controle motor BLDC

### 3.4 Obtenção de parâmetros físicos

#### Dinâmica veicular

Para a avaliação do coeficiente de arrasto do veículo fez-se uso da extensão *Flow Simulation* do programa *Solidworks*, partindo de um modelo CAD otimizado, baseado em uma literatura que sugere a utilização de formas da indústria aeroespacial. Em especial, o uso de perfil NACA (*National Advisory Committee for Aeronautics*) [10–12] de baixas velocidades, coeficiente de arrasto e coeficiente de sustentação, como o perfil NACA 2421, eleito como base para a vista lateral do modelo. Utilizando o modelo otimizado em CAD do veículo, um valor de  $C_d$  igual a 0,20 é obtido. A disposição da gaiola de segurança junto a geometria é apresentada na **figura 9**.



**Fig. 9** – Vista em corte do modelo utilizado e gaiola e segurança (Elaborada pelos autores).

As demais especificações do veículo e condições ambientais encontram-se apresentadas na **tabela 1**. Ressalta-se ainda a estimativa do coeficiente de resistência ao rolamento, utilizando como referência valor encontrado aferido por [13]. Ademais, o valor do momento de inércia do rotor do motor elétrico é fornecido pela Fabricante [14].

**Tab 1** – Parâmetros da dinâmica veicular

Parâmetro	Valor
Massa total - piloto + veículo ( $m$ )	90 kg
Aceleração da gravidade ( $g$ )	9,81 m/s <sup>2</sup>
Ângulo de rampa ( $\theta$ )	0°
Coef. resistência ao rolamento ( $\mu_{rr}$ )	0,002
Densidade do ar local ( $\rho$ )	1,184 kg/m <sup>3</sup>
Área frontal efetiva ( $A$ )	0,5 m <sup>2</sup>
Raio da roda ( $r$ )	0,25 m
Coeficiente de arrasto ( $C_d$ )	0,20
Rendimento da transmissão ( $\eta_g$ )	0,97
Momento de inércia do rotor ( $I_m$ )	170 g . cm <sup>2</sup>
Relação de transmissão ( $G$ )	7
Momento de inércia das rodas ( $I_w$ )	0,25 kg . m <sup>2</sup>

As forças resistivas são então determinadas e apresentadas na **tabela 2**.

Tab 2 – Forças resistivas

Força	Valor
Força de resistência ao rolamento ( $F_{rr}$ )	1,7658 N
Força de arrasto aerodinâmico ( $F_{ad}$ )	0,0592 v <sup>2</sup> .kg/m
Força de subida de nível ( $F_{hc}$ )	0
Força de aceleração ( $F_{ia}$ )	94,014 a .kg

Logo, como proposto na equação 9, o esforço trativo reduz-se à:

$$T = 1,7658 + 0,0592v^2 + 94,014 \frac{dv}{dt} \quad (24)$$

#### Motor elétrico

Os parâmetros físicos do motor elétrico pertinentes ao modelo descrito na seção 2.2.2 são apresentados na **tabela 3**. Todos os dados encontram-se presentes no catálogo fornecido pelo próprio fabricante [14].

Tab 3 – Parâmetros do motor elétrico

Parâmetro	Valor
Voltagem nominal ( $V_n$ )	24 V
Torque na partida - stall ( $T_s$ )	13 N.m
Torque em operação nominal ( $T_n$ )	0,428 Nm
Velocidade em operação nominal ( $\omega_n$ )	4200 rpm
Velocidade sem carga ( $\omega_0$ )	4680 rpm
Corrente sem carga ( $I_0$ )	0,726 A
Constante de tempo mecânica ( $t_m$ )	0,645 m.s
Const. da força contra-eletromotriz ( $k_E$ )	48,5 mV/rad/s
Constante de torque ( $k_T$ )	48,6 m N.m/A
Resistência do enrolamento ( $R_s$ )	0,0894 $\Omega$
Indutância do enrolamento ( $L_s$ )	0,122 mH
Momento de inércia do rotor ( $J$ )	170 g · cm <sup>2</sup>

Note, no entanto, que o coeficiente de atrito viscoso  $B$ , necessário para a modelagem completa do motor, conforme a seção 2.2.2, não é fornecido diretamente no catálogo. No entanto, o mesmo pode ser obtido através da constante de tempo mecânica  $t_m$  [15]:

$$t_m = \frac{R_s J + L_s B}{R_s B + k_E k_T} \quad (25)$$

O coeficiente  $B$  será, então, dado por:

$$B = \frac{R_s J - k_E k_T t_m}{R_s t_m - L_s} \Rightarrow B = 5,7 \cdot 10^{-5} (SI) \quad (26)$$

Outro valor importante a ser levado em conta é o torque de atrito, que descreve o atrito interno presente em rolamentos e no sistema de comutação do motor. Segundo o manual do motor, o torque de atrito é produzido na velocidade  $\omega_0$ , quando todo o momento gerado é utilizado para superar tal fricção. Assim:

$$T_{at} = k_T I_0 \Rightarrow T_{at} = 0,03528 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (27)$$

A bateria considerada para a simulação é do tipo íon-lítio, modelo LGDAS31865, cujos parâmetros se encontram na **tabela 4**.

Tab 4 – Características da bateria

Parâmetro	Valor
Voltagem Nominal ( $V_{nom}$ )	36 V
Capacidade nominal ( $C$ )	8,8 Ah
Resistência interna ( $R$ )	0,1 $\Omega$
Células em série	10
Conexões em paralelo	4

## 4. Otimização e resultados

A busca de soluções máximas ou mínimas globais é, invariavelmente, de grande interesse para engenheiros. Ademais, a busca pela máxima eficiência energética é o intuito maior deste trabalho. Num algoritmo de otimização, objetiva-se minimizar (ou maximizar) uma dada função, definida como função objetivo. Para tal, variam-se os parâmetros de otimização. É possível, então, definir dois pontos principais do algoritmo de otimização: a função objetivo e os parâmetros a serem otimizados. De modo a permitir que o veículo atinja a velocidade desejada pelo motorista, é necessário que haja o controle ativo da voltagem fornecida ao motor elétrico. O controlador eletrônico é o responsável por realizar tal ação: ele varia a voltagem fornecida de modo que a velocidade real se aproxime da velocidade requerida pelo piloto. O tipo de controlador selecionado para o presente veículo é do tipo PID: Proporcional-Integral-Derivativo. O sistema de controle, ao receber o sinal de erro entre as velocidades de referência (fornecida pelo motorista) e a velocidade instantânea do automóvel, envia um sinal de voltagem correspondente em função dos parâmetros do PID. A **figura 10** apresenta o diagrama de blocos do modelo contendo o controle PID.

É comum que haja, no sistema de controle de um veículo elétrico, tanto um controle da velocidade no período de aceleração, quanto um controle de velocidade de cruzeiro [6]. Em geral, tais sistemas são independentes. Como consequência, a introdução do controle ocorreu em duas etapas: inicialmente, desenvolveu-se o sistema de controle de velocidade em cruzeiro, situação na qual as forças inerciais (de aceleração) são desprezíveis frente às forças de arrasto aerodinâmico e de resistência ao rolamento. Posteriormente foi desenvolvida a modelagem completa, isto é, para estados distantes da condição de

equilíbrio dinâmico, envolvendo também os trechos de aceleração a partir do repouso. A condição inicial do integrador é numericamente igual à tensão nominal do motor, de modo a permitir o torque máximo na partida, com velocidade inicial nula.

### 4.1 Otimização do controle em cruzeiro

Os parâmetros da otimização foram os 3 ganhos do controlador (P, I e D) e o coeficiente de filtro  $N$ . A função objetivo foi construída de modo a minimizar, para uma entrada degrau unitária de velocidade, o máximo sobressinal (overshoot) e o erro entre o sinal de referência e a velocidade desenvolvida ao longo do tempo. Para tal, utilizou-se a integral quadrática de erros (ISE, do inglês Integral Square of Errors), a qual representa um bom critério de performance para um controlador. A função é dada pela equação 28:

$$I_{ISE} = \int_0^t e(t)^2 dt \quad (28)$$

A função objetivo foi, então, construída de acordo com a equação 29:

$$f_{obj} = w_1 \cdot M_p + w_2 \cdot I_{ISE} \quad (29)$$

onde  $M_p$  é o *overshoot* apresentado pelo sistema quando submetido à entrada degrau unitária. A escolha pela função objetivo descrita pela equação 29 deve-se, principalmente, pela segurança do veículo e do condutor.

Em especial, é de extrema importância proteger o circuito controlador de sobrecorrentes, advindas de potenciais saltos de velocidade e aceleração. Foi necessário limitar o espaço de busca do algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas - PSO, de modo que apenas parâmetros positivos fossem analisados, evitando o coeficiente de filtro  $N$  negativo. Restringindo-se então o novo espaço de buscas, utilizou-se os limites expostos na **tabela 5**.

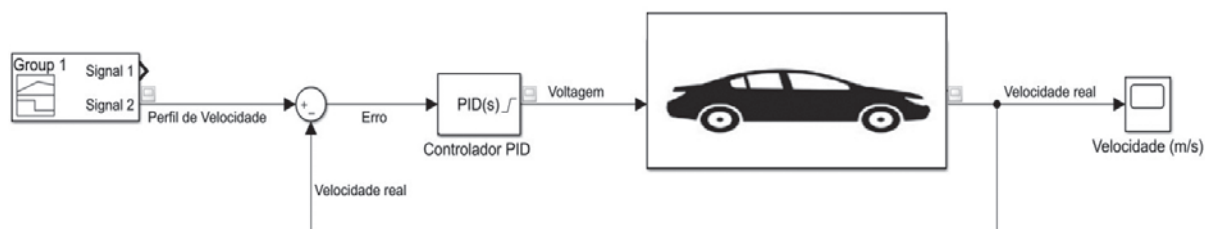


Fig. 10 – Modelo com controle PID

Tab 5 – Restrições aplicadas aos parâmetros na otimização PSO

Parâmetro	Limite superior	Limite inferior
P	0	irrestrito
I	0	irrestrito
D	0	irrestrito
N	0,00001	irrestrito

As configurações utilizadas para a nova rotina PSO encontram-se expostas na **tabela 6**.

Tab 6 – Configurações utilizadas na rotina PSO

Configuração	Valor
$c_1$	2
$c_2$	2
faixa de inércia $w$	0,1 a 1,1
número de indivíduos	15

A função objetivo foi construída tal que  $w_1$  e  $w_2$  foram ambos iguais a 1000. Como será exposto mais à frente, a escolha por tais pesos mostrou-se útil, a fim de se reduzir simultaneamente, o erro quadrático e o overshoot do sistema. Além disso, os coeficientes de aceleração  $c_1$  e  $c_2$  foram considerados iguais a 2. Os resultados obtidos encontram-se expostos na **tabela 7**.

Tab 7 – Parâmetros PID para velocidade de cruzeiro obtidos via PSO

Parâmetro	Valor
P	70096,0187728607
I	2346,00222480831
D	40,7327289058769
N	255819,239533505
Número de iterações	39
fobj	0,7591
flag de saída	-1

Atualizando o modelo do veículo com os valores PID obtidos por meio do PSO, presentes na **tabela 7**, analisou-se a resposta do sistema às entradas tradicionais degrau e senoidal. A **figura 11** revela que a resposta do sistema para uma entrada degrau unitário não apresenta *overshoot* perceptível.

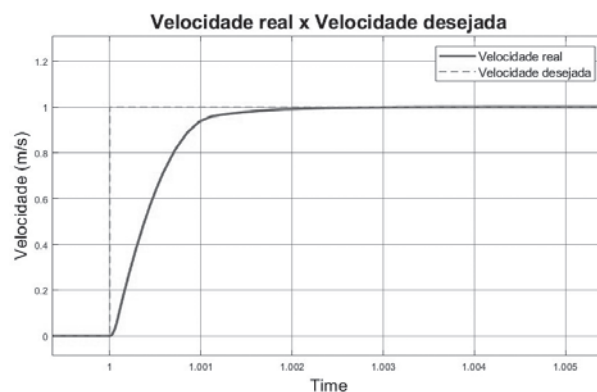
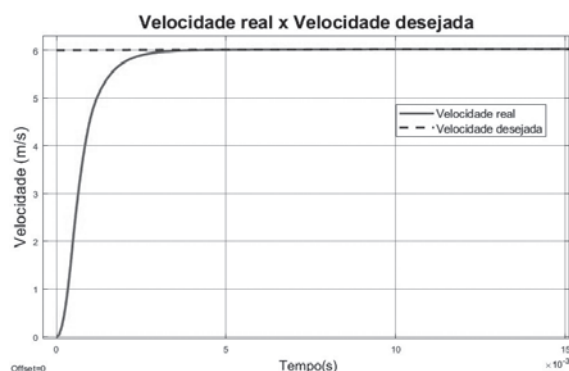


Fig. 11 – Resposta otimizada - entrada degrau unitário

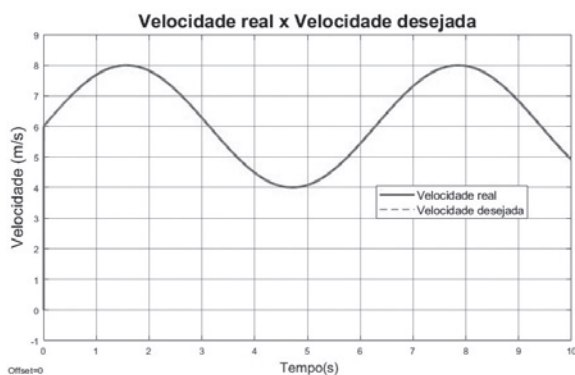


Isso ocorreu sem que o tempo de acomodação ficasse elevado; ao contrário, tal parâmetro de performance ficou na ordem de 3 milissegundos (0,003 segundos), valor imperceptível para o motorista, uma vez que o tempo de reação humana está entre 0,15 e 0,45 segundos. A **figura 12** mostra os instantes iniciais do movimento para uma entrada degrau positiva de 6 m/s. Em um tempo de 5 milissegundos, o veículo atingiu a velocidade prescrita, novamente sem *overshoot*.



**Fig. 12** – Resposta otimizada - entrada degrau 6m/s

Simulou-se, então, o comportamento do veículo para uma entrada senoidal positiva de 6 m/s, conforme mostrado na **figura 13**. Percebe-se, deste modo, que o veículo tem condições de acompanhar esta velocidade prescrita sem dificuldades.



**Fig. 13** – Detalhe da resposta do modelo otimizado para entrada senoidal

É necessário ressaltar, porém, que o sistema de controle até então desenvolvido é para velocidades de cruzeiro, isto é, para uma pequena variação da velocidade de entrada, fornecida pelo motorista através de um potenciômetro no pedal do motorista.

## 4.2 Otimização do controle com aceleração

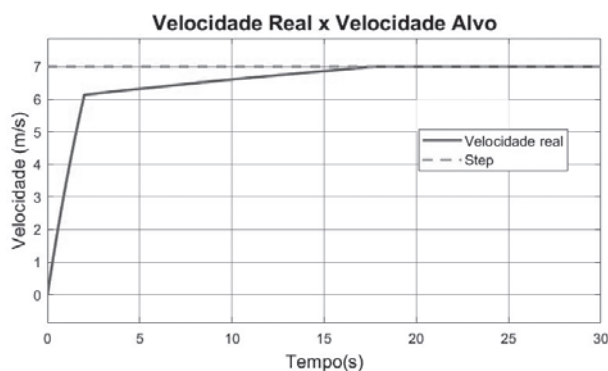
Para o controle com aceleração, o subsistema do Motor Elétrico recebe como entrada Voltagem e Velocidade, fornecendo Torque como saída. Nesse caso, existe a limitação física do torque máximo fornecido pelo motor e da corrente nominal, acima da qual o motor não pode operar por muito tempo. Desse modo, foi limitado ao motor que operasse por até 1,5 segundos acima da corrente nominal. A partir daí, um bloco Switch garantiria que o torque máximo fornecido seria igual ao torque nominal, limitando-se, assim, a corrente máxima no motor elétrico.

A **tabela 8** mostra os valores dos parâmetros PID obtidos para o modelo que incorpora o controle de aceleração. A função convergiu após 52 iterações, sem que fosse necessário pará-la no meio do processo.

**Tab 8** – Parâmetros PID para controle com aceleração, obtidos via PSO

Parâmetro	Valor
P	939393,806580017
I	0
D	2187,22186914434
N	59002,0350022799
Número de iterações	52
$f_{obj}$	90,8557
flag de saída	1

Simulou-se o sistema com uma entrada de grau de 7 m/s (25,2 km/h), velocidade média mínima que deve ser desenvolvida na competição *Shell Eco Marathon* para que o carro complete o percurso dentro do tempo de prova. O resultado encontra-se disposto na **figura 14**.



**Fig. 14** – Tempo necessário para atingir a velocidade de cruzeiro de 7 m/s

A **figura 14** permite verificar que o veículo é capaz de atingir a velocidade de cruzeiro após 18 segundos. Observe que o veículo atinge a velocidade de 6 m/s em 1,5 segundos, graças ao Torque inicial máximo fornecido pelo motor elétrico. A partir de então, o torque é limitado ao torque nominal, explicando a mudança de inclinação na curva de velocidade. O motor opera sob máximo torque nominal até o momento em que atinge a velocidade especificada.

### 4.3 Otimização do consumo energético

O objetivo final da maratona de eficiência energética *Shell Eco Marathon* é percorrer um dado percurso, consumindo a menor quantidade possível de energia. Para isso o veículo deve completar a prova dentro de um tempo limite estipulado pela organização.

O segundo modelo desenvolvido (controle

com aceleração) é capaz de calcular a distância total percorrida pelo veículo e o respectivo consumo energético para quaisquer percurso e velocidade. Aplicando-se então as restrições da competição *Shell Eco Marathon*, é possível determinar o melhor perfil de velocidade, partindo do repouso, que permita percorrer o circuito com o menor consumo de energia.

Para tal, empregou-se um algoritmo genético de otimização, cuja rotina encontra-se presente na *Global Optimization Toolbox*, do *Matlab*. As restrições adotadas foram baseadas na competição, tal que:

- O carro deve percorrer as 14 voltas do circuito em um tempo menor do que 28 minutos; e
- O veículo não deve extrapolar o limite de segurança de velocidade, estipulado pela equipe em 45 km/h.

De modo a minimizar o esforço computacional, já elevado para rotinas de otimização que envolvem o *Simulink*, dividiu-se o percurso total em uma única volta. Assim, o veículo deveria ser capaz de percorrer, em 120 segundos, distância maior ou igual do que uma volta. Traduzindo as restrições ao algoritmo, empregou-se as presentes na **tabela 9**.

**Tab 9** – Restrições ao algoritmo genético

Restrição	Valor
Distância percorrida	> 786 m
Velocidade mínima	0 km/h
Velocidade máxima	< 45 km/h
Tempo da volta	120 s

De fato, a 1ª volta é a volta de maior consumo energético, devido à grande quantidade de energia necessária para a retirada do veículo do repouso. Todas as outras voltas terão, consequente-

mente, um consumo menor. Foram utilizadas funções polinomiais de coeficientes e expoentes variáveis para representar diferentes perfis de velocidade, dada a elevada capacidade das mesmas em serem “interpoladores ideais”. Esta metodologia, em combinação com o algoritmo genético, já foi provada bem-sucedida para a aproximação de funções diversas [16].

A entrada escolhida para a velocidade foi um polinômio de 5 termos. Dessa forma, o perfil de velocidade temporal pode ser visto na equação 30.

$$v(t) = a_1 \cdot t^{b_1} + a_2 \cdot t^{b_2} + a_3 \cdot t^{b_3} + a_4 \cdot t^{b_4} + a_5 \cdot t^{b_5} \quad (30)$$

Sumarizando, cada indivíduo foi formado por 10 partes (parâmetros), isto é: cada um dos coeficientes  $a$  e  $b$  presentes na equação 31. A simulação foi realizada de modo que, caso o indivíduo não fosse capaz de completar o percurso, ele estaria tão pobremente adaptado ao meio que não teria chances práticas de sobreviver. Resume-se, enfim, os parâmetros restantes do algoritmo na **tabela 10**.

**Tab 10** – Configurações do algoritmo energético

Configuração	Valor
Nº de indivíduos	26
Tipo de população	vetor de doubles
Tipo de mutação	mutationadaptfeasible
Função de Seleção	selectionstochunif
Função de Crossover	crossoverscattered
Limites dos coeficientes	[-25; 25]
Limites dos expoentes	[-5; 5]

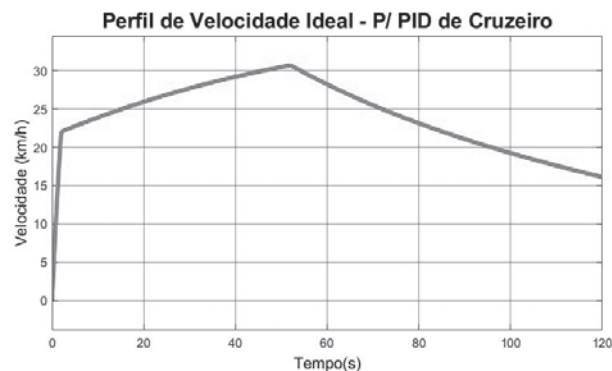
Para a aplicação do algoritmo, utilizou-se, tanto os parâmetros de PID obtidos para velocidade de cruzeiro, quanto aqueles obtidos para o caso geral que engloba acelerações. Ambos os resultados são mostrados a seguir.

### 4.3.1 Consumo para velocidade de cruzeiro

Aplicando os parâmetros PID descritos na **tabela 7**, a função obtida encontra-se presente na equação 31.

$$v(t) = 194995 \cdot t^{-0,172943} + 82468348 \cdot t^{-0,15650} + 0,734357 \cdot t^{0,00081} + 8125872 \cdot t^{0,3332331} - 0,08381627 \cdot t^{1,0504542} \quad (31)$$

Ao aplicar a entrada descrita na equação 31, obteve-se o perfil de velocidade apresentado na **figura 15**, com consumo de 137,3 km/kWh.



**Fig. 15** – Perfil de velocidade ideal - PID de Cruzeiro

### 4.3.2 Consumo contemplando acelerações

Aplicando-se agora os parâmetros PID descritos na **tabela 8**, obteve-se a função apresentada na equação 32.

$$v(t) = -0,841896 \cdot t^{-1,18186} - 0,75015 \cdot t^{1,242863} + 0,776164 \cdot t^{0,621560} + 1,16937 \cdot t^{1,13881} + 1,342135 \cdot t^{-1,143936} \quad (32)$$

Ao aplicar a entrada descrita na equação 32, obteve-se o perfil de velocidade da **figura 16**.

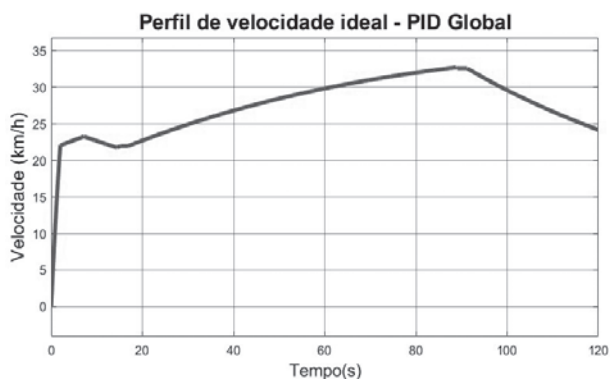


Fig. 16 – Perfil de velocidade ideal - PID com aceleração

Nesta situação, mesmo para um PID otimizado para este caso, o consumo específico foi de 120,7  $\text{km/kWh}$ . Este valor, como era de se esperar, foi maior do que o consumo específico para velocidade de cruzeiro.

#### 4.4 Análise de sensibilidade

A fim de avaliar a sensibilidade do modelo, escolheu-se a variável consumo de energia elétrica total ao longo do percurso, e também a integral quadrática dos erros, para serem otimizadas. Tendo em vista o objetivo do projeto de alta eficiência energética e bom controle para o sistema, essas variáveis devem ser minimizadas. Os parâmetros de entrada para essa análise foram amostragens aleatórias de 150 valores da massa  $m$ , raio da roda  $r$ , constante de torque do motor  $k_t$ , coeficiente de arrasto aerodinâmico  $C_d$  e coeficiente de resistência ao rolamento  $\mu_{rr}$ . As amostras aleatórias foram retiradas de distribuições normais com as características expostas na **tabela 11**, de acordo com o método de Monte Carlo.

Tab 11 - Características das distribuições normais

Parâmetro	Média ( $\mu$ )	Padrão ( $\sigma$ )
$C_d$	0,3	0,06
$k_t$	0,0486	0,000426
$m$	90	7
$r$	0,254	0,02
$\mu_{rr}$	0,002	0,0004

Com o objetivo de analisar estatisticamente a relação entre estas variáveis, utiliza-se a correlação simples e a correlação parcial, obtidas pela extensão de *Sensitivity Analysis* do *Simulink*, as quais são apresentadas na **figura 17**. Vale observar que os resultados não se traduzem em uma indiferença do modelo quanto aos parâmetros que apresentam menor resultado de correlação. A análise mostra somente a sensibilidade a pequenas incertezas na variável de entrada.

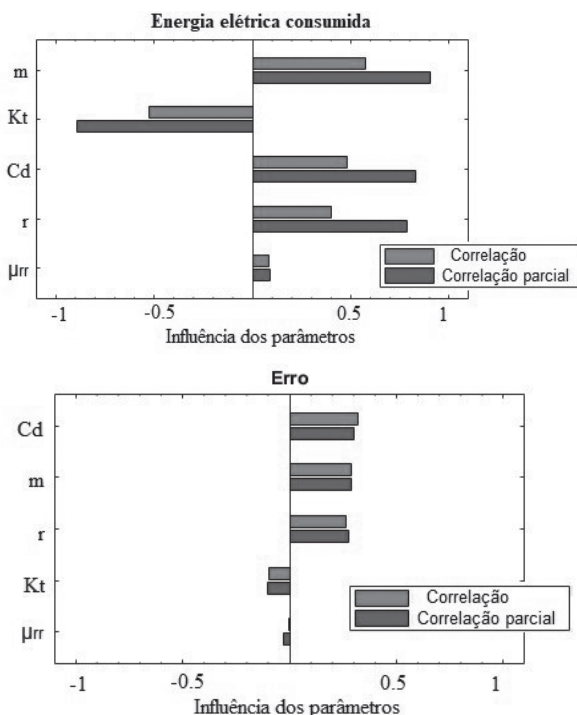


Fig. 17 – Análise estatística da relação entre as variáveis

A análise de sensibilidade indica a necessidade de boas estimativas do coeficiente de arrasto aerodinâmico, da massa do veículo e do raio da roda. É desejável também que a constante de torque assuma o valor fornecido pelo fabricante ao longo de toda a vida útil do motor, visto que uma alteração neste parâmetro implicaria perda substancial da representatividade do modelo.

## 5. Conclusão

O presente trabalho desenvolveu um modelo em *Simulink* de um veículo elétrico mono tripulado, com foco na simulação da dinâmica longitudinal, do motor elétrico e da bateria, visando à determinação e melhoria de seu desempenho. Para tal, os fenômenos físicos presentes foram primeiramente descritos, e posteriormente modelados numericamente por diagrama de blocos. Foram estabelecidos os sistemas integrados e correspondentes ao motor, bateria e dinâmica veicular. Finalmente, levantou-se os

parâmetros de interesse para a simulação, possibilitando a obtenção de resultados gráficos característicos da situação considerada.

Tendo em vista que o coeficiente de resistência ao rolamento e o coeficiente de arrasto aerodinâmico precisam ser estimados para o veículo em questão, é favorável à consistência do modelo que a correlação dessas variáveis com o gasto energético seja baixa. Adicionalmente, o raio da roda e a massa do veículo são variáveis de medição física razoavelmente fácil. Assim, o fato do modelo ser mais sensível a essas variáveis não compromete a consistência do modelo.

Conclui-se que o modelo desenvolvido retorna resultados otimizados de altíssima eficiência, considerando os parâmetros de interesse, o que possibilita uma melhor compreensão dos fenômenos e seus impactos na eficiência energética do veículo.

## Referências bibliográficas

- [1] LARMINIE, J.; LOWRY, J. Electric vehicle technology explained . [S.l.]: John Wiley Sons, 2012.
- [2] GRUNDITZ, E. Design and assessment of battery electric vehicle powertrain, with respect to performance, energy consumption and electric motor thermal capability . [S.l.]: Chalmers University of Technology, 2016.
- [3] POPE, R. The effect of wheel speed on rolling resistance. *Journal of terramechanics* , Elsevier, v. 8, n. 1, p. 51–58, 1971.
- [4] GILLESPIE, T. D. Fundamentals of vehicle dynamics . [S.l.], 1992.
- [5] HUSAIN, I. Electric and hybrid vehicles: design fundamentals . [S.l.]: CRC press, 2003.
- [6] EHSANI, M. et al. Modern electric, hybrid electric, and fuel cell vehicles . [S.l.]: CRC press, 2018.
- [7] XIA, C.-l. Permanent magnet brushless DC motor drives and controls . [S.l.]: John Wiley Sons, 2012.
- [8] TREMBLAY, O.; DESSAINT, L.-A. Experimental validation of a battery dynamic model for ev applications. *World electric vehicle journal* , Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 3, n. 2, p. 289–298, 2009.
- [9] OGATA, K. Modern control engineering . [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2009.
- [10] MESSANA, A. et al. From design to manufacture of a carbon fiber monocoque for a three wheeler vehicle prototype. *Materials* , Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 12, n. 3, p. 332, 2019.
- [11] SCARSELLI, G.; DONATEO, T.; LUPERTO, R. Structural frame development of a prototype car with



high energetic performance. In: Proceedings of 13th EAEC European Automotive Congress, Paper code: EAEC13/EAEC2011\_C43. [S.l.: s.n.], 2011.

- [12] ROGIEST, D. et al. Design of a fuel efficient prototype's monocoque. 2017.
- [13] TARGOSZ, M. et al. Velocity planning of an electric vehicle using an evolutionary algorithm. In: SPRINGER. International Conference on Transport Systems Telematics . [S.l.], 2013. p. 171–177.
- [14] MAXON. Datasheet for EC-i 52mm, brushless, 180 Watt High Torque EC Motor . [S.l.], 2017.
- [15] XIA, C.-l. Permanent magnet brushless DC motor drives and controls. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- [16] BAQAIS, A. Genetic algorithm for function approximation: an experimental investigation. International Journal of Artificial Intelligence and Applications , v. 7, 201.

# Simulação da dinâmica longitudinal de veículos leves automáticos com diferentes acoplamentos hidrodinâmicos

Igor Lucas Reinaldo, Elias Dias Rossi Lopes\*, Gustavo Simão Rodrigues, Ricardo Teixeira da Costa Neto  
Instituto Militar de Engenharia  
Praça General Tibúrcio, 80 - 22290-270 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

**RESUMO:** Este trabalho apresenta uma análise da dinâmica longitudinal de veículos leves automáticos, com diferentes acoplamentos hidrodinâmicos. Para isso, faz-se uso da biblioteca SIMDRIVELINE do MATLAB®, que possui blocos representativos de diversos componentes e subsistemas veiculares. Essa abordagem utiliza uma modelagem por fluxo de potência, utilizando sinais físicos entre os diversos blocos constitutivos. É elaborado, portanto, um modelo completo do veículo, permitindo a análise de diversas variáveis dinâmicas, bem como a influência dos acoplamentos hidráulicos sobre essas variáveis.

**ABSTRACT:** This paper presents an analysis of the longitudinal dynamics of automatic light vehicles with different hydrodynamic couplings. For this, it is used the MATLAB® SIMDRIVELINE library, which has representative blocks of various vehicle components and subsystems. This approach uses power flow modeling, using physical signals between the various constitutive blocks. Therefore, a complete model of the vehicle is elaborated, allowing the analysis of several dynamic variables, as well as the influence of the hydraulic couplings on these variables.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas de Transmissão. Conversor de Torque. Transmissão Automática. Dinâmica Longitudinal.

**KEYWORDS:** Transmission Systems. Torque Converter. Automatic Transmission. Longitudinal Dynamics

## 1. Introdução

Ao longo da história, os motores, sistemas de transmissões e rodas foram se desenvolvendo de acordo com as necessidades e conhecimentos existentes em cada período. O motor de combustão interna surgiu apenas no fim do século XIX e, a partir daí, com a 2ª Revolução Industrial, uma grande explosão tecnológica permitiu o avanço da engenharia automotiva em todos os âmbitos, desde pneus até motores. Com o desenvolvimento de *softwares* de simulação, reduziu-se a necessidade de testes de campo, otimizando custos e, ao mesmo tempo, obtendo resultados com boa aproximação à realidade [1].

Entre as grandes inovações no campo da engenharia automotiva, encontram-se em destaque as transmissões automáticas que apresentam como principais vantagens o maior conforto para o motorista e aumento da eficiência do conjunto de força, uma vez que, por meio da Unidade de Controle Eletrônica, definem os melhores instantes para trocas de marcha [2]. Em geral, as transmissões automáticas utilizam acoplamentos hidrodinâmicos entre o motor e a árvore primária da caixa principal. O acoplamento fluido permite que a variação de velocidade provocada pela troca de marcha seja imposta ao motor de maneira mais suave, permitindo que ela ocorra sem o acionamento de uma embreagem de dis-

cos, como ocorre na transmissão manual [2].

Devido às suas diversas características, as transmissões automáticas são amplamente utilizadas também em veículos militares e carros de combate, pois retiram do motorista uma atribuição, aumentando a eficiência da tripulação de um veículo em operações. Além disso, quando equipadas com conversores de torque, as transmissões automáticas possuem uma maior multiplicação de torque quando partindo do repouso (relação de *stall*), melhorando a resposta do veículo quando em combate [3].

Alguns estudos acerca de transmissões automáticas têm por objetivo estudar a dinâmica de componentes isolados, como os conversores ou caixas. [4] apresenta um projeto de conversor com três elementos, conhecido também como Trilok, que possuem eficiência melhor que os demais, conforme apresentado nas seções seguintes. [5] apresenta um modelo linear de um conversor de torque, considerando a dinâmica do seu fluido de trabalho e dos elementos mecânicos que o compõe. Por fim, demonstra que, apesar de ser mais simples, o modelo elaborado apresenta resultados próximos dos obtidos por outros modelos disponíveis na literatura. Os conversores, entretanto, são tratados muitas vezes como caixas-pretas, em que não se conhece exatamente a dinâmica ou equacionamento envolvido, mas apenas seus efeitos. [6] apresenta então uma metodologia para identificação de parâmetros das curvas características dos conversores, utilizando informações sobre sua dinâmica longitudinal. [7] propõe uma metodologia de identificação *online*, de forma que os parâmetros do conversor sob diversas condições sejam identificados em tempo real.

A dinâmica longitudinal de veículos é a que envolve processos de aceleração e frenagem, e

visa avaliar o desempenho do veículo por meio de variáveis como velocidade máxima, aceleração máxima ou distância de parada [1]. Esse campo é explorado em estudos que visam a automação de veículos ou a melhora de seu desempenho por meio de sistemas de controle de tração (TCS, em inglês) ou anti-bloqueio de freios (ABS). Em ambos, a maior complexidade é encontrada no modelo dinâmico dos pneus, que envolve fenômenos não lineares, como atrito e elasticidade [8].

Este trabalho tem por finalidade fazer uma análise de dinâmica longitudinal de veículos leves automáticos. Para isso, faz uso da biblioteca SIMSCAPE do MATLAB®, especialmente a biblioteca SIMDRIVELINE®, que fornece vários blocos representando as partes de um veículo, como caixa de câmbio, diferencial, entre outros. Essa abordagem consiste em uma modelagem por fluxo de potência, utilizando sinais físicos entre os diversos blocos constitutivos. Faz-se a modelagem do conjunto de força de um veículo com transmissão automática, comparando três tipos de acoplamentos hidrodinâmicos: conversor de torque convencional, conversor Trilok e embreagem hidrodinâmica. A partir da parametrização das curvas destes elementos, faz-se uso do mesmo motor e da mesma caixa de transmissões, a fim de verificar os distintos efeitos na dinâmica longitudinal. Em todos os modelos, são considerados os efeitos da dinâmica dos pneus.

## 2. Fundamentação Teórica

### 2.1 Motor

Para uma análise mais precisa considera-se, em geral, que um motor a combustão interna movido a gasolina tem sua Curva de Potência em WOT (carga total) dada por uma aproximação

polinomial. Segundo [9], essa curva pode ser aproximada por um polinômio de grau 3, dado por:

$$P_e = P_1\omega_e + P_2\omega_e^2 + P_3\omega_e^3 \quad (1)$$

Na equação 1,  $\omega_e$  é a velocidade angular do motor. Sabendo que  $\omega_M$  é a velocidade angular na qual o motor opera em máxima potência PM, os coeficientes são dados por:

$$P_1 = \frac{P_M}{\omega_M} \quad (2)$$

$$P_2 = \frac{P_M}{\omega_M^2} \quad (3)$$

$$P_3 = -\frac{P_M}{\omega_M^3} \quad (4)$$

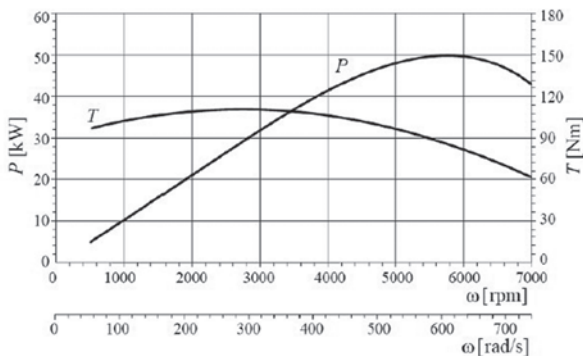
Assim, como o torque do motor é dado por

$$T_e = \frac{P_e}{\omega_e} \quad (5)$$

Ou ainda:

$$T_e = P_1 + P_2\omega_e + P_3\omega_e^2 \quad (6)$$

A **figura 1** ilustra um gráfico de torque e potência para um motor.



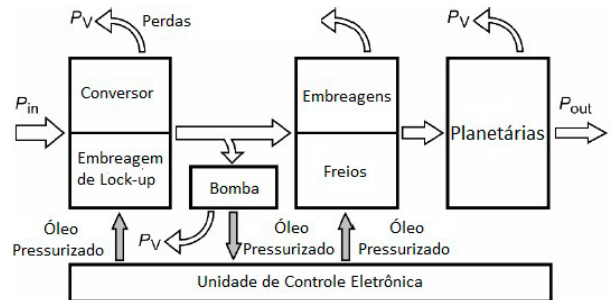
**Fig. 1** – Curva de um motor [9]

## 2.2 Sistemas de transmissão automáticos

Segundo [9], com o objetivo de multiplicar o torque que o motor produz, reduzindo a rotação, existem várias formas intermediárias de transmissão entre o motor e as rodas. Dentre elas se destacam o uso de CVT (Transmissão Continuamente Variável, em inglês), o uso de reduções por correntes ou engrenagens e caixas de câmbio.

Em carros mais luxuosos ou esportivos, costuma-se utilizar transmissões nas quais não é necessária a mudança manual. Dessa forma, todo o processo de acoplamento e desacoplamento é feito por meio de atuadores controlados pela Unidade de Controle Eletrônica (UCE). Uma característica peculiar desse tipo de transmissão é o uso de planetárias, que permitem um maior número de marchas em uma configuração bem mais compacta do que seria necessário utilizando pares de engrenagens, que é o caso de transmissões manuais e automatizadas [2].

Para ativar os atuadores, a UCE utiliza óleo pressurizado, que circula tanto pelo conversor de torque, que será abordado mais adiante, como pelos freios e embreagens. Assim ocorrem perdas consideráveis, como mostrado na **figura 2**. No entanto, como não há interrupção no fluxo de potência, aumenta-se o desempenho geral do veículo [2].



**Fig. 2** – Perdas de energia envolvidas em uma transmissão automática com Conversor de Torque [2].

Para os fins deste trabalho, são abordados três tipos de acoplamento hidráulicos que podem fazer a ligação do motor com a caixa de câmbio em uma transmissão automática: Embreagem Hidrodinâmica, Conversor de Torque Convencional e Conversor de Torque Trilok®.

A embreagem hidrodinâmica é composta por uma bomba, movida pelo motor, que impulsiona óleo centrifugamente e faz a turbina, ligada ao resto da transmissão, se movimentar, transmitindo o movimento da árvore primária à árvore secundária. No entanto, como não há a presença de um estator, para alterar a direção de fluxo do óleo, há apenas conversão de velocidade, mas não de torque.

Já para o conversor de torque, a reação na carcaça do conversor não é nula e é possível se obter várias relações de torque, uma vez que o estator é localizado no interior do conversor e que é fixo no seu eixo.

Considerando torque total nulo no sistema e conservação da quantidade de movimento angular, é possível obter que o rendimento total é dado por [2]:

$$\eta = \mu \nu \quad (7)$$

onde  $\nu$  é a razão de velocidades da turbina pela bomba, e  $\mu$  é a conversão de torque, dada pela razão entre o torque transmitido pela turbina e aquele dado pela bomba (**figura 3**).



**Fig. 3** – Esquema de um Conversor de Torque, com o fluxo de potência mostrado. 1:Bomba; 2:Turbina; 3:Estator [2].

A diferença entre o conversor convencional e Trilok reside no fato deste último, para não reduzir demais o desempenho, possui um estator montado em uma roda livre, de forma que, para altas razões de velocidade, o fluido se choca contra a face convexa das lâminas do reator e provocando seu movimento (já que a roda livre impede a rotação em apenas uma direção). Esse ponto é conhecido como lock-up. Dessa forma, ele se comporta como uma embreagem hidrodinâmica [2]. Essa diferença é ilustrada nas **figuras 4 e 5**.



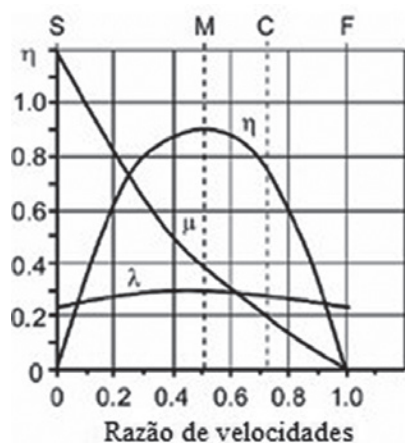


Fig. 4 - Curvas para conversor de torque convencional [2]

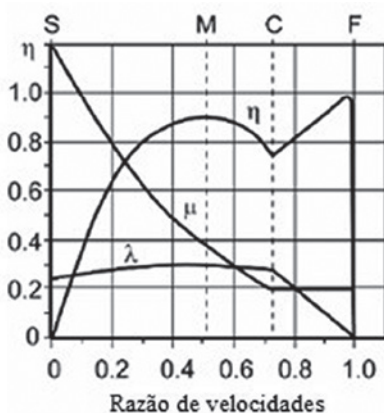


Fig. 5 - Curvas para conversor de torque Trilok® [2]

onde  $\lambda$  é um valor característico de descrição do conversor, utilizado como fator de proporcionalidade na parametrização do conversor.

## 2.3 Transmissão final

Após passar pela caixa de câmbio, antes mesmo de ir para as rodas, existem ainda alguns elementos, que aplicam uma redução final à transmissão. Dentre eles, há o diferencial, que será o único abordado nesse trabalho.

Em algumas situações, é necessário que uma roda gire com velocidade angular diferente da

outra, em um mesmo eixo, como no caso de situações de curva. Para isso existe o diferencial, que pode ser de diversos tipos: aberto, de deslizamento limitado e bloqueado. O foco deste trabalho é o aberto, que é o tipo mais comum em veículos de passeio, que não necessitam de características *off-road*.

Segundo [2], este tipo de diferencial é composto por uma ou mais planetárias acopladas, com 2 graus ou mais de liberdade (**figura 6**). Geralmente são utilizados para distribuição de torque entre rodas em um mesmo eixo.

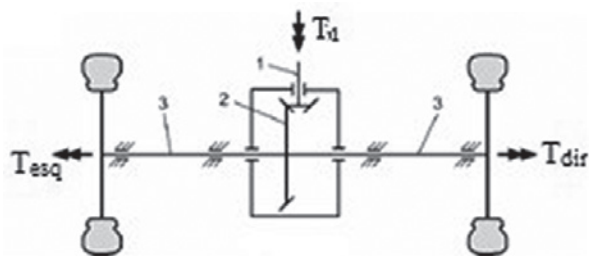


Fig. 6 - Representação de um diferencial aberto em um eixo [2]

O mecanismo, no veículo, recebe como entrada um torque proveniente da caixa de câmbio, de modo que o fluxo de potência passa pelo pinhão, coroa, porta-satélites, satélites e, por fim, pela planetária, antes de seguir pelas semi-árvores, que transmitem o movimento às rodas.

## 2.4 Modelagem dos pneus

De acordo com [10], o pneu serve para 2 principais funções: suportar cargas verticais e prover forças longitudinais (aceleração e frenagem) e laterais (em curvas).

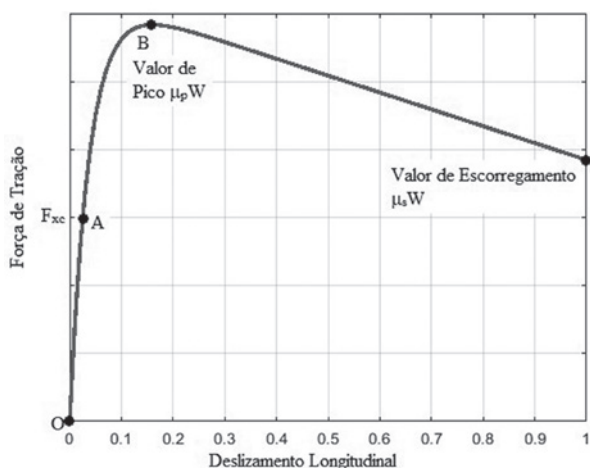
Dessa forma, durante a aplicação de torque, ocorre o fenômeno do deslizamento longitudinal, fazendo com que o pneu tenha um raio efetivo de rotação distinto do raio real. O desliza-

mento longitudinal, segundo [11], é dado por:

$$i = \left(1 - \frac{V}{r\omega}\right) \times 100\% \quad (8)$$

onde  $V$  é a velocidade linear do pneu,  $r$  é o raio de rolamento livre do pneu e  $\omega$  é a velocidade angular do pneu.

Nota-se que quando o pneu rotaciona sem transladar, há 100% de deslizamento, e quando o pneu realiza rolamento puro, isto é,  $V = \omega r$ , não há deslizamento. Além disso, a força de tração não varia linearmente com essa medida, como é de se esperar em determinada faixa de valores. Essa variação ocorre de acordo com o apresentado abaixo.



**Fig. 7** – Força de tração em função do deslizamento longitudinal.

Segundo [11], quando o deslizamento ocorre, exclusivamente, devido à deformação elástica do pneu, tem-se o comportamento linear inicial, dado no trecho OA da **figura 7**, onde:

$$\tan\theta = C_i \quad (9)$$

Mas, a partir do instante no qual há deslizamento da região de contato do pneu em relação ao solo, essa relação é alterada, a partir do ponto A. Chega-se, assim, em um ponto de máxima tração.

$$F_p = \mu_p W \quad (10)$$

e, posteriormente, de deslizamento puro

$$F_s = \mu_s W \quad (11)$$

onde  $W$  é a carga vertical no pneu,  $\mu_p$  é o valor de pico do coeficiente de aderência e  $\mu_s$  é o valor de deslizamento do coeficiente de aderência. É importante salientar que o valor de pico do coeficiente ocorre, em geral, entre 15% e 20%, de acordo com dados experimentais [11].

Para representar, algebricamente, a relação entre a força de tração e o deslizamento longitudinal, há uma série de dificuldades ocasionadas pela complexidade do comportamento de um pneu. Uma boa aproximação é dada pelo modelo da Fórmula Mágica. Trata-se de uma análise semi-empírica, considerando constantes obtidas por meios experimentais, mas em formato definido que, em geral, aproxima-se da realidade satisfatoriamente. Foi sugerida em 1991 por [8] e é abordada na literatura sobre dinâmica veicular.

Segundo [9], a relação entre a força de tração e o deslizamento dada pela Fórmula Mágica é:

$$F_x = A \sin\{B \arctan[C \times i - D(C \times i - \arctan(C \times i))]\} \quad (12)$$

Para se encontrar as constantes A, B, C e D deve-se, inicialmente, realizar um experimento para achar a curva experimental mostrada na **figura 8**.

Em seguida, com as relações dadas no gráfico e listadas abaixo obtém-se as constantes.

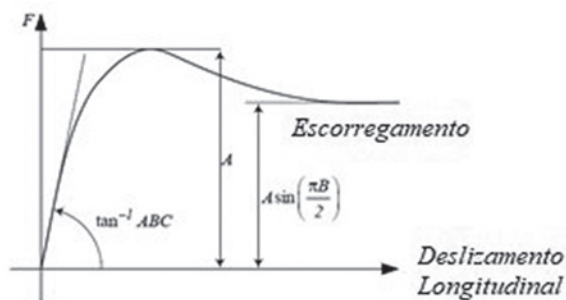


Fig. 8 – Parâmetros A, B, C e D para a Fórmula Mágica [9]

$$A = F_p \quad (13)$$

$$B = \arcsen\left(\frac{F_s}{F_p}\right) \frac{2}{\pi} \quad (14)$$

$$C = \frac{C_i}{AB} \quad (15)$$

onde  $C_i$  é a tangente da região linear do gráfico e D é obtido através de qualquer ponto da curva, uma vez que, nessa etapa, já se sabe A, B e C.

## 2.5 Dinâmica longitudinal

A fim de avaliar o desempenho veicular, deve-se considerar as perdas do sistema de *powertrain* por resistências externas, seja por atrito, calor ou por outras maneiras.

Além disso, os veículos devem superar diversas forças de resistência durante seu movimento. As principais são a resistência à rampa, a resistência ao rolamento e a resistência aerodinâmica. Nesse trabalho, são consideradas as duas últimas. Ou seja, considera-se por hipótese, que o veículo se move o tempo todo no plano horizontal.

A resistência ao rolamento é a de efeito predominante e depende de vários fatores, como forma e pressão de ar dos pneus, condições de solo e temperatura ambiente. Segundo [11], o pneu,

ao rolar, tem a região de contato deformada, fazendo com que haja maior pressão na metade da frente do pneu do que na metade traseira. Assim, o centro de pressão normal é deslocado no sentido do rolamento, gerando um momento resistivo no sentido contrário ao rolamento em relação ao eixo de rotação do pneu (figura 9). Para que o pneu esteja em rolamento livre, o equilíbrio é estabelecido por uma força horizontal na região de contato do pneu com o solo, a força de resistência ao rolamento. A razão entre esta e a força normal resultará no coeficiente de resistência ao rolamento.



Fig. 9 – Distribuição de pressão no pneu [10].

Por depender bastante de vários fatores e de efeitos imprecisos e incertos, torna-se complexa a determinação da força de resistência ao rolamento. No entanto, pode-se realizar aproximações considerando situações empíricas para a obtenção dessa grandeza. De acordo com [9], essa força é dada por:

$$F_r = W\mu_r \quad (16)$$

onde W é o peso total do veículo e o coeficiente de resistência é dado por:

$$\mu_r = \mu_0 + \mu_1 v^2 \quad (17)$$

Empiricamente, pode-se determinar cada um

dos coeficientes do polinômio. Para alguns tipos de pavimento, há na literatura valores médios para esses coeficientes [9].

A resistência aerodinâmica, apesar de menos atuante em baixas velocidades, assume papel importante na obtenção teórica dos valores de velocidade máxima. É causada tanto pelo atrito viscoso com o ar como pela diferença de pressão nas regiões anterior e posterior do veículo. De acordo com [10] e [11], a força de resistência aerodinâmica é definida como:

$$R_D = \frac{1}{2} \rho A_f C_D v^2 \quad (18)$$

Onde  $\rho$  é a densidade volumétrica do ar,  $A_f$  é a área frontal do veículo,  $C_D$  é o coeficiente de arrasto e  $v$  é a velocidade do veículo. Em geral, o coeficiente de arrasto é de complexa obtenção, sendo necessários experimentos em túneis de vento ou simulações numéricas.

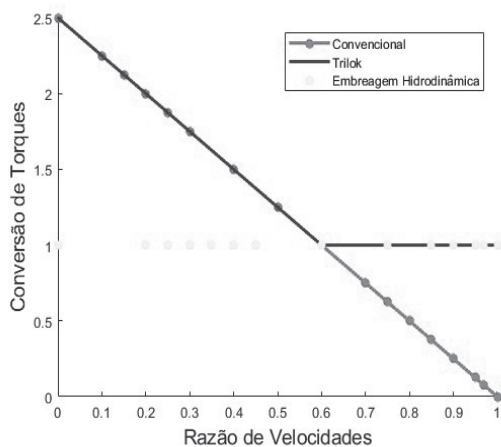
### 3. Simulações e resultados

Aplicando a teoria desenvolvida e com o auxílio da biblioteca SIMDRIVELINE®, do SIMSCAPE®, no software MATLAB®, é possível obter os valores de velocidade longitudinal e posição para o veículo avaliado, com os diferentes acoplamentos hidrodinâmicos.

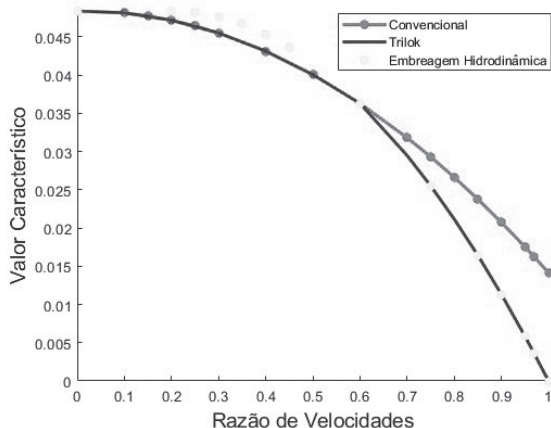
Essa análise comparativa de desempenho em um veículo automático com 6 velocidades, com seus dados obtidos no sítio Automobile Catalog<sup>M</sup>. Para isso, utilizam-se 3 tipos de sistema de acoplamento distintos: a embreagem hidrodinâmica, o conversor de torque convencional e o conversor de torque Trilok. É possível avaliar, assim, motivos pelos quais um tipo é mais empregado do que outro, excluindo-se os motivos relacionados ao custo. Os demais componentes da transmissão são mantidos, como a caixa de marcha Lepelletier 6 velocidades.

Para evitar elevados valores de deslizamento longitudinal na partida, utiliza-se uma abertura da borboleta bastante baixa (igual a 0,2) para a primeira marcha e a segunda marcha, o que não afeta muito o desempenho, já que são mantidas por pouco tempo e o motor apresenta alta potência. Em seguida, aumenta-se a abertura para valores mais próximos de 1, em velocidades mais elevadas.

A partir da modelagem abordada por [6], é possível fazer a aproximação das curvas para a conversão de torque e para o valor característico, como mostrado nas **figuras 10 e 11**.



**Fig. 10** – Conversão de Torque dos Sistemas de Acoplamento



**Fig. 11** – Valor Característicos dos Sistemas de Acoplamento

Modela-se o conversor convencional de modo que até o ponto de *lock-up* seja igual ao conversor Trilok. Este, posteriormente ao ponto citado, passa a se comportar como uma embreagem hidrodinâmica.

As 3 curvas para o valor característico são obtidas a partir de duas interpolações polinomiais de grau 2, resultando em  $p_1$  e  $p_2$ . Para o conversor convencional, as condições utilizadas foram:

$$p_1(0) = k_{max} \quad (19)$$

$$p_1(v_{lock-up}) = p_2(v_{lock-up}) \quad (20)$$

$$p_1(1) = k_{min} \quad (21)$$

onde  $k_{max}$  é definido pela rotação mínima para a qual o conversor deve atender o motor, que é 1000 RPM, e  $k_{min}$  é definido pela rotação máxima para o qual o conversor deve atender, que é 6500 RPM. Ambos visando o *match* do motor com o acoplamento correspondente. Já o  $v_{(lock-up)}$  é dado pelo instante no qual o rendimento é máximo, isto é,  $v = 0,6$ .

Para a embreagem hidrodinâmica, considere-se  $k=1$  até , seguido de uma parábola definida por:

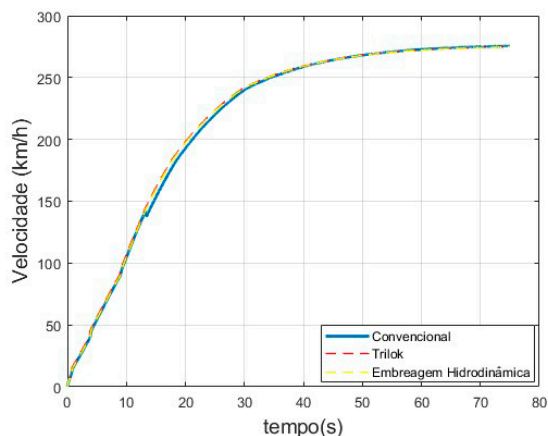
$$p_2(0,2) = k_{max} \quad (22)$$

$$p_2'(0,2) = 0 \quad (23)$$

$$p_2(1) = 0 \quad (24)$$

E, por fim, o conversor Trilok acompanha o conversor convencional até  $v=0,6$  e depois segue a embreagem hidrodinâmica.

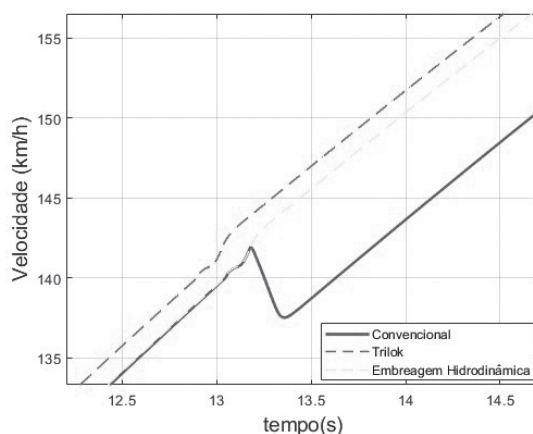
Como resultados, é possível obter a velocidade longitudinal do veículo (**figuras 12 e 13**) e a rotação do motor (**figuras 15**) ao longo do tempo de simulação.



**Fig. 12** – Velocidade Longitudinal do Veículo nos 3 Sistemas de Acoplamento

Apesar de ficarem bem próximas durante os primeiros instantes, o veículo com embreagem Trilok é aquele que possui melhor desempenho, ficando bem notável a partir do instante  $t=13,3s$ . Isto se deve ao fato de o mesmo propiciar maior torque durante toda a operação, fazendo com que esteja sempre em posições a frente dos outros dois veículos.

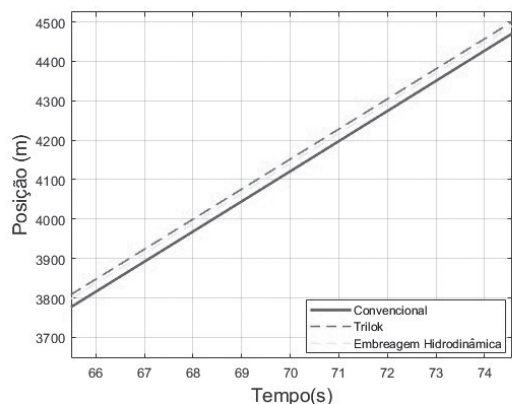
Com a aproximação feita no gráfico da velocidade, é possível notar claramente a diferença entre os 3 acoplamentos.



**Fig. 13** – Velocidade Longitudinal do Veículo nos 3 Sistemas de Acoplamento, em detalhe

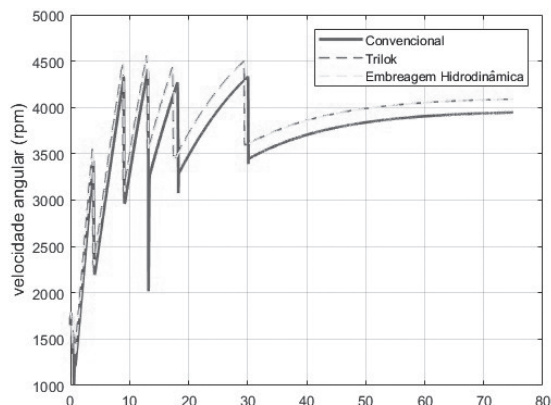


No instante mais crítico, a velocidade do conversor Trilok é 147 km/h, enquanto no conversor convencional é 137 km/h. A embreagem hidrodinâmica tem eficiência maior que o conversor convencional, em altas razões de velocidade. Por isso apresenta um resultado melhor após o ponto de *lock-up*.



**Fig. 14** – Posição do Veículo para os 3 Sistemas de Acoplamento

Apesar de ser uma diferença baixa na velocidade, há uma diferença de deslocamento ao longo do tempo, como mostrado na **figura 14**. Exemplificando, nos últimos instantes mostrados, a posição do Trilok é cerca de 40m superior ao convencional e cerca de 20m superior à embreagem hidrodinâmica, confirmando a ideia anterior.



**Fig. 15** – Velocidade Angular do Motor nos 3 Sistemas de Acoplamento

Coerentemente à velocidade longitudinal, tem-se que a rotação do veículo (**figura 15**) com o conversor convencional mantém-se sempre menor que o Trilok. Além disso, a embreagem hidrodinâmica propicia uma rotação muito semelhante ao dado pelo Trilok, apesar de um pouco mais baixa, igualando-se a partir do ponto de *lock-up*. Observa-se, também, as rotações máximas atingidas por cada marcha bem próximas, com exceção da primeira. Isso é feito propositalmente para extrair a máxima potência do motor.

## 4. Conclusão

É possível notar a facilidade que o uso da biblioteca SIMDRIVELINE® proporciona no modelo dinâmico de veículos. Pelo fato de possuir diversos blocos, necessitando apenas que se definam as grandezas físicas que representam as entradas, dispensando a construção detalhada dos modelos abordados na seção 3 em SIMULINK® e abre-se uma grande quantidade de possibilidades para a criação de modelos aperfeiçoados de sistemas de transmissão. Possibilita-se ainda o aumento de desempenho por meio de simulações computacionais que dispensam testes de campo. No entanto, deve-se conhecer profundamente os modelos, sob pena de apenas operar o software, sem compreender o fenômeno físico envolvido no modelo.

O modelo elaborado permite a comparação do desempenho dos três tipos de acoplamento hidrodinâmico analisados. É possível notar que o conversor Trilok possui um desempenho consideravelmente melhor que a embreagem hidrodinâmica que, por sua vez, possui melhor desempenho que o conversor convencional. Isso justifica o fato de o primeiro ser o único utilizado

em carros modernos, sendo os outros dois abandonados pela indústria.

Em algumas variáveis analisadas, as diferenças de desempenho possuem valores pequenos. Mas essas diferenças podem tomar maiores amplitudes quando avaliadas em veículos esportivos, de alto desempenho, ou militares, cujo peso é muito maior que o considerado nesse modelo. Nos veículos militares essa diferença ainda pode influenciar na mobilidade e na agilidade, essenciais em situações de contato iminente com tropas

inimigas [3]. Além disso, é interessante ressaltar que o conversor Trilok apresenta maior eficiência energética, reduzindo o consumo de combustível no veículo.

A presente metodologia permite ainda que, em trabalhos futuros, seja possível estabelecer e avaliar estratégias de controle variadas, considerando outros fatores, além da velocidade longitudinal do veículo, visando aplicação em veículos leves de passeio e esportivos ou até mesmo militares.

## Referências bibliográficas

- [1] Lopes, E. D. R., Reinaldo, I. L., Costa Neto, R. T. da. Modeling and Simulation of the Longitudinal Dynamics of a Light Vehicle with Automatic Transmission. SAE Technical Papers 2018-36-0153.
- [2] Naunheimer, H., Bertsche, B., Ryborz, J., & Novak, W. Automotive transmissions: fundamentals, selection, design and application. Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] Ogorkiewicz, Richard M. Technology of tanks. Vol. 1. Jane's Information Group, 1991.
- [4] Whitfield, A., F. J. Wallace, and A. Patel. "Design of three element hydrokinetic torque converters." *International Journal of Mechanical Sciences* 25.7 (1983): 485-497.
- [5] Banerjee, Joydeep M., and John J. McPhee. "Graph-theoretic modeling and dynamic simulation of an automotive torque converter." *IFAC Proceedings Volumes* 45.2 (2012): 1219-1224.
- [6] Lopes, Elias D. R., Pinto, André F. A., Reis, Caio C. D. do P. Estimation of parameters of the torque converter of an automatic transmission of a passenger vehicle, XXVII Simpósio Internacional de Engenharia Automotiva, Blucher Engineering Proceedings, Volume 6, 2019, Pages 1-4, ISSN 2357-7592, <http://dx.doi.org/10.1016/simea2019-PAP03>.
- [7] Mishra, Kirti D., and Krishnaswamy Srinivasan. "On-line identification of a torque converter model." *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017): 4763-4768.
- [8] Pacejka, Hans. Tire and vehicle dynamics. Elsevier, 2005.
- [9] Jazar, R. Vehicle Dynamics. Springer Science & Business Media, 2010.
- [10] Gillespie, Thomas D. Fundamentals of vehicle dynamics. Vol. 400. Warrendale, PA: Society of automotive engineers, 1992.
- [11] Wong, Jo Yung. Theory of ground vehicles. John Wiley & Sons, 2008.

# Preparo de monômeros utilizados na síntese de polímeros a partir da reação de epoxidação em óleos vegetais

João Gabriel P. Rodrigues; Ricardo P. Weber

Instituto Militar de Engenharia

Praça General Tibúrcio, 80 - 22290-270 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

\* [eliasrossi@ime.eb.br](mailto:eliasrossi@ime.eb.br)

**RESUMO:** Os materiais poliméricos, por serem versáteis, de baixo custo e de fácil processamento, são muito requisitados industrialmente. Em virtude da necessidade de se obter polímeros de fontes renováveis, a síntese destes materiais a partir de óleos vegetais tem crescido e se tornou um dos atuais focos em pesquisa neste campo. Entretanto, para ocorrer a reação de polimerização é necessário transformar as moléculas destes óleos em monômeros passíveis de reagir entre si, ou seja, é necessário modificar alguns grupos funcionais destes materiais através, por exemplo, de reações de epoxidação. Este trabalho teve como objetivo, estudar e avaliar, através da análise termogravimétrica e da espectroscopia em infravermelho por transformada de Fourier (FTIR), monômeros preparados por epoxidação de óleos de soja e girassol.

**PALAVRAS-CHAVE:** Polímeros, epoxidação, monômero de óleo vegetal.

**ABSTRACT:** Because polymeric materials, in general, are versatile, cheap and easy to process, they are essential to industry. Nowadays, the tendency to use sustainable sources to prepare polymeric materials using vegetable oils on their synthesis has increased and became the focus of research in this area. Before being used in polymer synthesis, vegetable oils must undergo reactions that modify the unsaturations of their major functional groups. In this context, the present publication deals with the preparation of monomers based on soybean and sunflower oils through the epoxidation reaction for subsequent polymerization.

**KEYWORDS:** Polymers, epoxidation, monomer of vegetable oil

## 1. Introdução

A sintetização é o primeiro passo para a obtenção de polímeros com propriedades mecânicas adequadas às necessidades dos produtos finais<sup>[1]</sup>. A substituição de materiais estruturais convencionais por polímeros se deve, principalmente, à fácil processabilidade, ao baixo custo, a resistência mecânica similar aos materiais tradicionais, a resistência a degradação física e química à baixa densidade destes materiais<sup>[2]</sup>.

A indústria química utiliza fontes não renováveis, tais como o petróleo, para a obtenção de tais

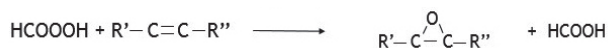
materiais, entretanto, a preocupação com o futuro tem conduzido a busca por fontes renováveis que possam propiciar matéria prima adequada a obtenção de polímeros compatíveis, em termos de propriedades mecânicas, com aqueles já tradicionalmente produzidos<sup>[3]</sup>. Alguns exemplos destes recursos naturais renováveis são: ligninas, carboidratos, amidos, proteínas e óleos vegetais, que têm despertado o interesse devido ao seu baixo custo, produção em larga escala, baixa toxicidade e ampla disponibilidade<sup>[4]</sup>.

Os óleos vegetais apresentam complexas misturas de diversos ésteres e ácidos graxos, que

constituem as moléculas de triglicerídeos [5]. O comprimento da cadeia dos ácidos graxos se encontra, geralmente, na faixa de C12-C24, variando de acordo com a oleaginosa e possui importante papel nas propriedades do óleo vegetal. A reatividade das moléculas de triglicerídeos depende do tipo de ácido graxo existente na molécula e da quantidade de suas ligações duplas. A produção de materiais poliméricos a partir dos óleos vegetais necessita, inicialmente, da transformação destas moléculas em monômeros, através da mudança nas ligações insaturadas em grupos funcionais mais reativos, tais como: grupos epoxidico, acrilato, hidroxilas [6]. Nos grupos epoxidicos, a epoxidação ocorre entre a ligação dupla carbono-carbono e um oxigênio ativo presente na molécula do ácido percarboxílico (obtido por meio da reação química entre peróxido de hidrogênio e ácido carboxílico), resultando na conversão desta ligação em um anel epóxido, como mostrado na **figura 1** [6]. A epoxidação em compostos olefínicos pode ser obtida por diferentes métodos, sendo os mais típicos: epoxidação com ácidos percarboxílicos, epoxidação com peróxidos orgânicos e inorgânicos, epoxidação com halohidrinas, e epoxidação com oxigênio molecular[7].

Existem diversos trabalhos dedicados a estudar a transformação de triglicerídeos em monômeros que possibilitam a produção de polímeros com propriedades físicas e mecânicas semelhantes aqueles obtidos através do petróleo. Como quase toda planta produz óleo vegetal, a obtenção de monômeros e, conseqüentemente, de polímeros por fontes renováveis, é incomensurável. Este trabalho teve como objetivo, estudar e avaliar, através da análise termogravimétrica e da espectroscopia em infravermelho por transforma-

da de Fourier (FTIR), monômeros preparados por epoxidação de óleos de soja e girassol.



**Fig.1** – Epoxidação com ácidos percarboxílicos.

## 2. Materiais e métodos

### 2.1. Materiais

As reações de epoxidação foram realizadas em óleos de soja e de girassol da marca LIZA. Os materiais utilizados na epoxidação dos óleos vegetais foram: ácido fórmico (P.A) da empresa VETEC, peróxido de hidrogênio (50%) da empresa B'Herzog e diclorometano (P.A) da empresa Proquimios.

### 2.2. Métodos

#### 2.2.1. Epoxidação de óleos vegetais

A epoxidação dos óleos de soja e de girassol foi realizada sob condições reacionais constantes, fazendo uso de ácido percarboxílico (agente oxidante) gerado in situ através da interação química entre peróxido de hidrogênio e ácido fórmico. Para as reações, as concentrações molares do óleo de soja e de girassol foram mantidas constantes, variando-se apenas as concentrações de peróxido de hidrogênio, com o objetivo de produzir a epoxidação.

A **figura 2** apresenta o sistema reacional para síntese de óleos vegetais epoxidados. Após a reação, o material sintetizado foi lavado com água quente com a finalidade de eliminar a acidez remanescente do processo reacional. Após o processo de lavagem, os óleos vegetais epoxidados foram secos

através de agitação constante e aquecimento a 95°C. Após o tratamento térmico dos óleos epoxidados, o material está pronto para ser caracterizado.



**Fig 2** – Sistema reacional para síntese de óleos vegetais epoxidados

### 2.2.2. Análise termogravimétrica (TGA)

A análise termogravimétrica, dos óleos vegetais antes e após a epoxidação, foi realizada em um analisador térmico Shimadzu DTG-60, sob atmosfera de nitrogênio com uma taxa de 50 ml/min, em uma faixa de temperaturas de 25-600°C e a uma taxa de aquecimento de 10°C/min.

### 2.2.3. Espectroscopia de infravermelho com transformadas de fourier

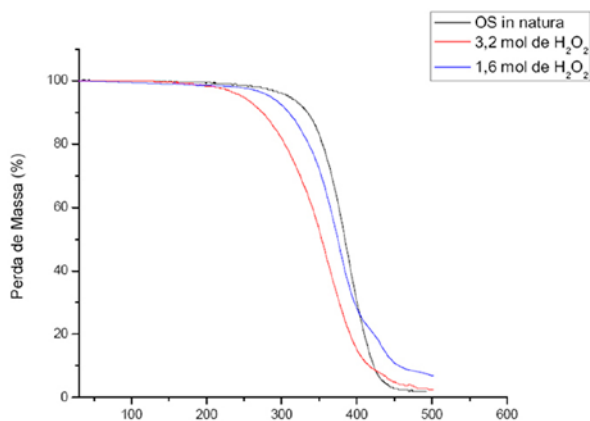
Os espectros de FTIR dos óleos de soja e de girassol antes e após a epoxidação foram obtidos em um espectrômetro da marca BRUKER, modelo

Alpga. A varredura foi realizada entre 4000-525.

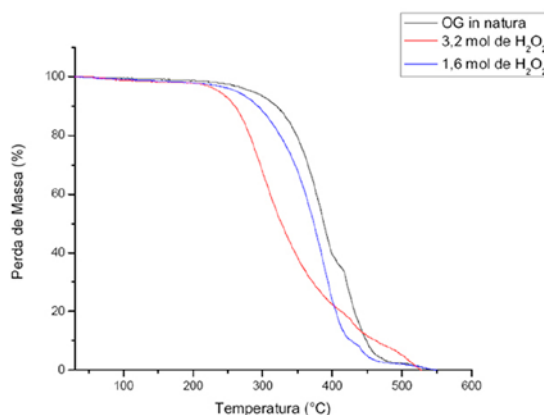
## 3. Resultados e discussões

### 3.1. Análise termogravimétrica (TGA)

Essa técnica determina a perda de massa das amostras em função da temperatura com a finalidade de obter dados sobre a temperatura de decomposição do material. As **figuras 3 e 4** apresentam as curvas TGA dos óleos vegetais antes e após a reação de epoxidação.



**Fig 3** – Análise de TGA para o óleo de soja epoxidado obtido.



**Fig 4** – Análise de TGA para o óleo de girassol epoxidado obtido.

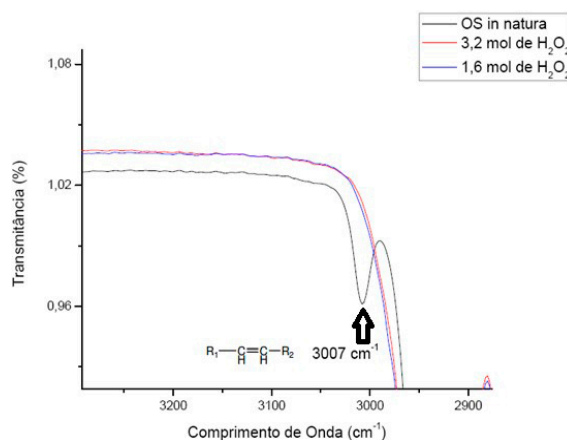


A partir das curvas obtidas pela análise termogravimétrica, observa-se que o início da decomposição dos óleos epoxidados ocorre em uma temperatura inferior à do óleo não epoxidado, tanto no óleo de soja quanto no óleo de girassol, indicando que a medida que a concentração de agente oxidante foi aumentada, nota-se uma diminuição na temperatura de decomposição do substrato gerado pela reação de epoxidação. Isto pode estar associado com a inserção de grupamento epóxido nas moléculas de triglicerídeos dos óleos de soja e girassol. As amostras obtidas com maior concentração de peróxido de hidrogênio, possuem menores temperaturas de decomposição em relação as amostras obtidas com 1,6 mol de peróxido de hidrogênio, mostrando que maiores concentrações deste reagente podem ter causado mais modificações químicas na molécula de triglicerídeo.

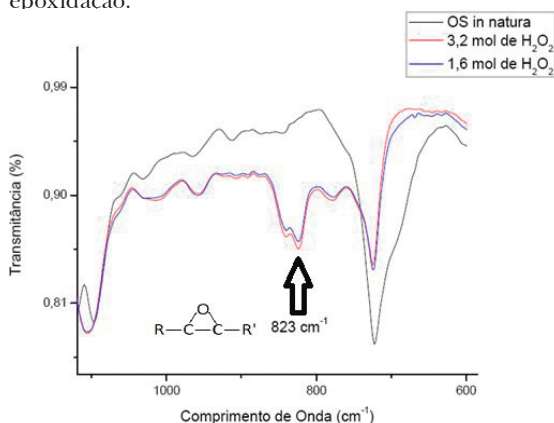
### 3.2. Espectroscopia de infravermelho com transformadas de Fourier (FTIR)

As **figuras 5 e 6** apresentam os espectros do óleo de soja (OS) *in natura* e epoxidado. Nota-se o desaparecimento do pico em 3007 nos óleos epoxidados, referente a conversão das insaturações em outros grupos químicos e observa-se o aparecimento do pico em 822-833 nos óleos epoxidados, referente a reação de epoxidação do óleo, confirmando a ocorrência da reação de epoxidação.

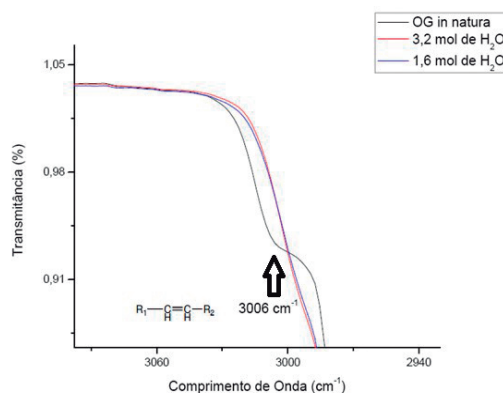
As **figuras 7 e 8** apresentam os espectros do óleo de girassol (OG) *in natura* e epoxidado, onde também é observado o mesmo desaparecimento do pico na região em 3006 e o aparecimento do pico na região em 822-833, confirmando a ocorrência da reação de epoxidação no material.



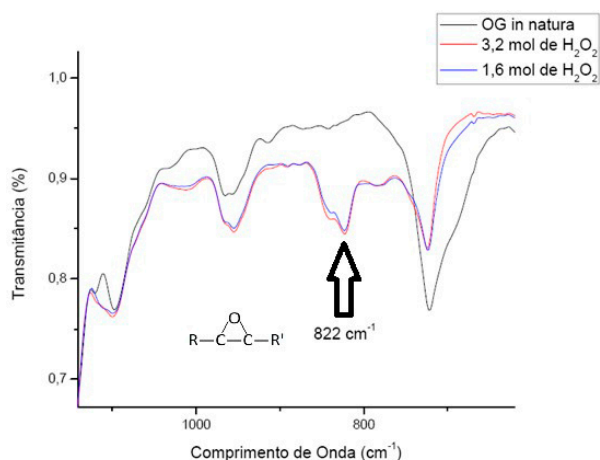
**Fig 5** – Espectros de FTIR dos óleos de soja antes e após a epoxidação.



**Fig 6** – Espectros de FTIR para os óleos de soja antes e após a epoxidação.



**Fig 7** – Espectros para os óleos de girassol antes e após a epoxidação.



**Fig 8** – Espectros de FTIR dos óleos de girassol antes e após a epoxidação.

## 4. Conclusões

Os resultados mostraram que o aumento na concentração de agente oxidante no meio reacional

favoreceu a diminuição da temperatura de degradação dos óleos de soja e de girassol: a epoxidação realizada com 3,2 mol do peróxido de hidrogênio resultou em temperaturas inferiores às obtidas com 1,6 mol do mesmo reagente, o que indicou uma possível mudança nas moléculas de triglicerídeos.

Os espectros de FTIR confirmaram a conversão de duplas ligações presentes nas moléculas de triglicerídeos em grupamentos epóxidos, evidenciando a obtenção do monômero pela reação de epoxidação e confirmando a mudança nas moléculas de triglicerídeos, proposta no ensaio de TGA.

Pode-se concluir que a epoxidação do óleo de soja e de girassol mostra-se eficaz no preparo de monômeros para posterior polimerização, onde os óleos epoxidados com 3,2 mol de peróxido de hidrogênio podem gerar monômeros mais reativos e uma alternativa sustentável.

## Referências bibliográficas

- [1] Meier, M. A. R., Metzger, J. O., Schhubert, U. S., Plant oil renewable resources as green alternatives in polymer Science, Chemical Society Reviews, 2007
- [2] Zhang, C., Garrinson, T. F., Madbouly, S.A., Kessler, M. R., Recent advances in vegetable oil-based polymers and their composites, Progress in Polymer Science, 71, 2017, pgs 91-143, Guangzhou, China.
- [3] Kumar S., Samal S. K., Mohanty S., Nayak S. K., Study of curing kinetics of anhydride cured petroleum-based (DGEBA) epoxy resin and renewable resource based epoxidized soybean oil (ESO) systems catalyzed by 2-methylimidazole, Thermochimica Acta, 654, 2017, pgs 112-120, Odisha, India.
- [4] Wang Z., Zhang X., Wang R., Kang H., Qiao B., Ma J., Zhang L., Wang H., Synthesis and Characterization of Novel Soybean-Oil-Based Elastomers with Favorable Processability and Tunable Properties, Macromolecules, 45, 2012, pgs 9010-9019, Beijing, China.
- [5] Jin F. L., Li X., Park S. J., Synthesis and application of epoxy resins: A review Journal of industrial and engineering chemistry, 29, 2015, pgs 1-11, Jilin City, China.
- [6] Sienkiewicz A. M., Czub P., The unique activity of catalyst in the epoxidation of soybean oil and following reaction of epoxidized product with bisphenol A, Industrial Crops and Products, 83, 2016, pgs 755-773, Polônia.
- [7] Aguilera A. F., Tolvanen P., Heredia S., Munoz M. G., Samson T., Oger A., Verove A., Eranen K., Leveneur S., Mikkola J. P., Salmi T., Epoxidation of Fatty Acids and Vegetable Oils Assisted by Microwaves Catalyzed by a Cation Exchange Resin, Industrial engineering chemistry research, 57, 2016, pgs 3876-3886, Abo-Turku, Finlândia.



## Vantagens da Assinatura

- Alta qualidade das publicações, de interesse para militares e civis de diversas profissões, com temas de Relações Internacionais, História Geral e do Brasil, História Militar, Chefia e Liderança, Geopolítica, Ciência Política, Tecnologia de Defesa etc.
- Pagamento com desconto em relação à compra de exemplares avulsos.
- Comodidade de recebimento dos livros no endereço do assinante, via postal.

## Livros da Coleção General Benício

Tipos de assinatura:

- A - versão completa (10 livros, a R\$200,00)
- B - versão compacta (5 livros, a R\$150,00)

Ao efetuar sua solicitação à BIBLIEx, o novo assinante poderá escolher títulos editados no ano corrente ou em anos anteriores.

A partir do ano seguinte ao da assinatura inicial, passará a receber somente os títulos dos futuros lançamentos.

Além dos livros, a BIBLIEx publica revistas digitais, disponíveis gratuitamente no site:

- REVISTA EXÉRCITO BRASILEIRO
- A DEFESA NACIONAL
- REVISTA MILITAR DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Tradição e qualidade em publicações



# Agora, você tem mais facilidade em suas mãos.

Acesse. Simule. Contrate.

Sujeito a alteração sem aviso prévio.  
Consulte as normas e condições vigentes.

Correção pela  
**TR**, pelo **IPCA**  
ou juros  
**Prefixados**

Juros ainda  
menores

#fiqueemcasa

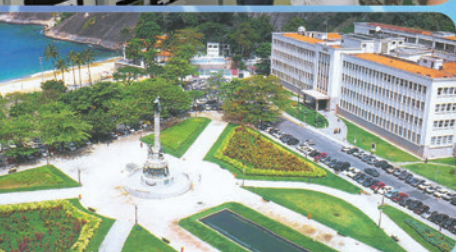


**FHE** **POUPEX**

[www.poupex.com.br](http://www.poupex.com.br)

0800 61 3040





# PÓS-GRADUAÇÃO NO IME

Bolsas: CAPES, CNPq e FAPERJ

## Mestrado

- Engenharia Mecânica
- Engenharia Nuclear
- Engenharia Elétrica
- Engenharia de Transportes
- Sistemas e Computação

## Mestrado e Doutorado

- Química
- Ciência dos Materiais
- Engenharia de Defesa



Apoio:



**CREA-RJ**  
Conselho Regional de Engenharia, Arquitetura  
e Agronomia do Rio de Janeiro

Matrículas: Fluxo Contínuo

Tel.: (21) 2546-7114 – Fax: (21) 2546-7089 – [www.ime.eb.br](http://www.ime.eb.br) – [sd1@ime.eb.br](mailto:sd1@ime.eb.br)