KU'RY'TYBA – Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba, Curitiba, v. 1, p. 57-74, Out. 2009. ISSN 2175-9243. DOI: 10.5281/zenodo.8092846

ESTUDO DA APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS EM FINANCIAMENTOS HABITACIONAIS

1º Ten OTT Paulo Amaro Velloso Henriques dos Santos[1]

Resumo: O artigo está dividido em três partes. A primeira parte consiste no desenvolvimento do conteúdo matemático de Análise Real, Séries Infinitas e Geométricas, para situar o leitor do tema que será trabalhado e desenvolver este conteúdo até a dedução das Equações de Diferenças. Na segunda parte são abordados os planos de amortização para financiamentos e mais especificamente os financiamentos habitacionais da Caixa Econômica Federal, demonstrando as situações e formas de amortizar um financiamento, para aumentar a compreensão sobre o caso a ser estudado e também conhecer os métodos utilizados pela Caixa Econômica Federal para modelagem das situações de financiamentos. Na terceira parte é aplicada uma Equação de Diferenças no processo de amortização das dívidas de um financiamento habitacional da Caixa Econômica Federal. Ao final, é realizado um comparativo entre o método que utiliza a Equação de Diferenças e o método hoje utilizado pela Caixa Econômica Federal.

Palavras-chave: Equação de Diferenças; Financiamento; Amortização.

Abstract: The article is divided into three parts. The first part is the development of the mathematical content of Real Analysis, and infinite geometric series, to locate the reader of the topic that will be working and developing this content to the deduction of equations of differences. In the second part of the project addressed the plans for funding of depreciation and more specifically the financing of a housing of the Caixa Econômica Federal, showing the situation and ways to repay the financing, to increase understanding about the case to be studied and also know the methods used for Caixa Econômica Federal to the modeling of situations of funding. In the third part of the project is applied Equation of Differences in amortization of debt financing of a housing of the Caixa Econômica Federal. In the end, we conducted a comparison between the method using the equation of differences and the method now used by the Caixa Econômica Federal.

Keywords: Equation of Differences; Financing; Amortization.

[1] Professor de Matemática no Colégio Militar de Curitiba
Especialista em Docência no Ensino Superior
e-mail: pauloamaro@hotmail.com

Séries Numéricas

Séries Numéricas, ou Séries Infinitas são somas com um número infinito de termos. Na Matemática, o exemplo clássico é a utilização de séries para representar dízimas periódicas, como

$\frac{2}{9} = 0{,}222... = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 + ...$.

Mas não é apenas em tópicos de matemática pura que o assunto de Séries é aplicado. Séries infinitas são utilizadas em vários casos da Economia, Biologia, Medicina, Farmacologia, entre outras ciências exatas, biológicas e tecnológicas. Como se verá neste trabalho, a utilização de Séries Infinitas é importante para várias áreas do conhecimento humano. Porém, o primeiro objetivo é definir o que chamamos de Série Numérica ou Série Infinita.

Segundo Anton (1999, p.54), série *"são somas de um número infinito de números reais"* e pode ser escrita na forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ e uma vez que é impossível somar diretamente um número infinito de números, as somas de séries infinitas são definidas e calculadas por um processo de limite indireto.

Segundo Lima (2004, p. 37), "uma série é uma soma $S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ com um número infinito de parcelas" que pode descrito como $S = \lim_{n\to\infty}(a_1 + ... + a_n)$. Por ser um limite, cai na condição de que este pode existir ou não existir, e com isso se pode classificar as séries como séries convergentes ou séries divergentes.

Dada uma seqüência (a_n) de números reais, pode-se formar com ela uma nova seqüência (S_n) que é definida pelas somas parciais da série $\sum a_n$, onde a parcela a_n é o termo geral: $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, ..., S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Se existir o limite $S = \lim_{n\to\infty}(S_n)$, diremos que a série $\sum a_n$ é convergente e se o limite não existir diz-se que a série é divergente.

Em alguns casos, além de a série $\sum a_n$ ser convergente, pode-se observar

KU'RY'TYBA – Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba, Curitiba, v. 1, p. 57-74, Out. 2009. ISSN 2175-9243. DOI:

que a série do módulo do termo geral $\left(\sum |a_n|\right)$ inicial também é convergente, e quando isso acontece, pode-se chamar a série de *absolutamente convergente*.

Para provar-se a convergência, ou divergência, de uma série infinita, utilizam-se testes que são realizados com o termo geral da série. Dois dos testes utilizados são: o *Teste de d'Alembert* e o *Teste de Cauchy*.

O Teste de d'Alembert propõe que se $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$, então a série $\sum a_n$ é convergente. Já o Teste de Cauchy propõe que se $\lim\sqrt[n]{|a_n|}<1$, então a série $\sum a_n$ será convergente.

Séries Geométricas

Uma série geométrica é toda a série que se puder ser descrita pela notação $\sum ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^k + ...$ em que cada termo após o primeiro é obtido pela multiplicação de seu predecessor imediato por uma constante multiplicativa *r*. Já que *r* é a razão entre qualquer termo (depois do primeiro) e seu predecessor imediato, pode-se referir à série como *série geométrica de razão r*.

Nota-se que uma série geométrica fica completamente especificada através de seu primeiro termo *a* e sua razão *r*. Por exemplo, especificando a série geométrica de termo inicial $a=1$ e razão $r=\frac{1}{2}$, temos $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^k}+...$.

Uma razão negativa *r* produz uma alternância de sinais algébricos, como, por exemplo, a série geométrica $3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+...$ que tem primeiro termo $a=3$ e razão $r=-\frac{1}{3}$.

Através de um hábil artifício, é possível obter uma fórmula simples para a *n*-ésima soma parcial S_n de uma série geométrica $\sum ar^n$.

Começando com $S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ (1), e multiplicando por *r*, obtém-se $S_n r = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n$ (2). Subtraindo a equação (2) da equação (1), tem-se

$S_n - S_n r = a - ar^n$ ou $S_n(1-r) = a(1-r^n)$. Portanto, $S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ se $r \neq 1$.

Sabe-se que se $|r| < 1$, então $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$; daí $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}$ se $r \neq 1$. Por outro lado, se $|r| > 1$, então a série geométrica acima diverge. No caso restante em que $|r| = 1$, ou seja, $r = 1$ ou $r = -1$, é fácil ver que a seqüência das somas parciais diverge.

Assim tem-se o seguinte teorema: "A série geométrica $\sum ar^n$ com termo inicial $a \neq o$ e razão r converge se e somente se . Se $|r| < 1$, então $\sum ar^n = \frac{a}{1-r}$."

Aplicações de Séries Geométricas

Séries Geométricas possuem várias aplicações práticas tanto na Matemática, expressando dízimas periódicas em frações ou no estudo de probabilidades, como em muitos ramos da Medicina e da Economia. A seguir, alguns exemplos extraídos das referências bibliográficas.

Exemplo 1 – Valor presente de uma anuidade

Encontre a quantia que você deve investir hoje a uma taxa de juros anual de 10%, capitalizados continuamente, de modo que, começando no próximo ano, você pudesse fazer retiradas anuais de \$400 por toda a vida.

Solução: A quantia que se deve investir hoje para gerar a seqüência desejada de retiradas é a soma dos valores presentes de cada uma das retiradas individuais. Calcula-se o valor presente de cada retirada usando a fórmula $P = Be^{-rt}$, com $B = 400$, $r = 0{,}1$, e t sendo o tempo, em anos, no qual a retirada é feita. Dessa forma,

$$P_1 = 400e^{-0,1}$$
$$P_2 = 400e^{-0,2}$$
$$\vdots$$
$$P_n = 400e^{-0,1(n)}$$

e assim por diante. A quantia que se deveria investir hoje é a soma desses infinitos valores presentes. Isto é $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} 400e^{-0,1(n)} = 400e^{-0,1}\left[1 + e^{-0,1} + \left(e^{-0,1}\right)^2 + \ldots\right]$.

Reconhecendo esta série como uma série geométrica com $a = 400e^{-0,1}$ e $r = e^{-0,1} = 0{,}9048$.

Como $|r| < 1$, a série converge com soma $\sum_{n=1}^{\infty} 400e^{-0,1(n)} = \frac{400e^{-0,1}}{1 - e^{-0,1}} = 3803{,}33$.

Desta forma, deve-se investir \$ 3.803,33 de maneira a atingir o objetivo estabelecido.

Exemplo 2 – Acúmulo de Medicação no Corpo

Um paciente recebe uma injeção de 10 unidades de uma determinada droga a cada 24 horas. A droga é eliminada exponencialmente, de modo que a fração remanescente no corpo do paciente após t dias é $f(t) = e^{-t/5}$. Se o tratamento continuar indefinidamente, aproximadamente, quantas unidades da droga existirão no corpo do paciente exatamente antes de uma injeção?

Solução: Da dose original de 10 unidades, somente $10e^{-1/5}$ unidades permanecem no corpo do paciente após 1 dia. A medicação no corpo do paciente após 2 dias consiste no que permaneceu das duas primeiras doses. Da dose original, somente $10e^{-2/5}$ unidades restam, e da segunda, restam $10e^{-1/5}$ unidades. Assim

$$S_1 = 10e^{-1/5}$$
$$S_2 = 10e^{-1/5} + 10e^{-2/5}$$
$$\vdots$$
$$S_n = 10e^{-1/5} + 10e^{-2/5} + \ldots + 10e^{-n/5}$$

KU'RY'TYBA – Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba, Curitiba, v. 1, p. 57-74, Out. 2009. ISSN 2175-9243. DOI:

Logo, a quantidade S de medicação no corpo do paciente a longo prazo é o limite de S_n quando n tende ao infinito. Isto é,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 10e^{-n/5} = \sum_{n=1}^{\infty} 10\left(e^{-1/5}\right)^n =$$

$$= 10e^{-1/5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-1/5}\right)^n = 10e^{-1/5}\left(\frac{1}{1-e^{-1/5}}\right) \cong 45{,}17\,\text{unidades}.$$

Equações de Diferenças

As equações diferenciais podem ser usadas para modelar diversas situações dinâmicas envolvendo comportamentos contínuos. Contudo é freqüentemente mais natural ou conveniente descrever certas situações em virtude do comportamento de uma série de pontos discretos, em vez de um fenômeno contínuo, por exemplo, censos populacionais de anos em anos, biólogos estudando colônias de bactérias a cada hora, economista observando boletins semanais de oferta e demanda.

As equações de diferenças representam o mesmo papel que as equações diferenciais exercem no estudo de fenômenos contínuos, porém são trabalhadas em situações dinâmicas discretas.

Uma função discreta $f(k)$ é uma função que tem uma seqüência de pontos em seu domínio, representado pelo índice k, e uma equação de diferenças é uma equação relacionando $f(k)$ com valores de f para índices k. Uma solução de uma equação de diferenças é uma função específica que satisfaz a equação, e uma solução geral é uma fórmula que caracteriza todas as soluções possíveis.

Equações de diferenças da forma $f(k+1) = af(k) + b$ em que a e b são constantes, aparecem em diversas aplicações e uma solução geral de uma equação deste tipo pode ser obtida usando o que conhecemos sobre séries geométricas.

Supondo que $f(0) = C$, para algum número C, então obtém-se

KU'RY'TYBA – Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba, Curitiba, v. 1, p. 57-74, Out. 2009. ISSN 2175-9243. DOI:

$$f(0) = C$$
$$f(1) = aC + b$$
$$f(2) = a[aC + b] + b = a^2C + ab + b$$
$$f(3) = a[a^2C + ab + b] + b = a^3C + a^2b + ab + b$$
$$\vdots$$
$$f(k) = a^kC + [a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a + 1]b$$

Sendo $a \neq 1$, e usando a fórmula obtida para a soma parcial de uma série geométrica, encontramos $f(k) = a^kC + [a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a + 1]b = a^kC + \frac{1-a^k}{1-a}b$ que é a solução geral da equação de diferenças. Ou seja, a solução da equação da diferença, onde $f(0) = C$, é $f(k) = \begin{cases} C + kb & se\ a = 1 \\ a^kC + \frac{1-a^k}{1-a}b & se\ a \neq 1 \end{cases}$.

Pode-se utilizar o exemplo abaixo para ilustrar a utilização de tal equação.

Exemplo 3 – Crescimento populacional

Há 12000 pessoas na cidade de São José. A cada ano, 3% das pessoas da cidade morrem e 720 bebês nascem. a) Qual será a população em 5 anos? b)Qual será a população a longo prazo?

Solução: a) Seja $P(n)$ a população após n anos. Como $0{,}03P(n)$ pessoas morrem no próximo ano, segue-se que $0{,}97P(n)$ sobrevivem, e a população após $(n + 1)$ anos satisfaz $P(n+1) = 0{,}97P(n) + 720$.

Substituindo $a = 0{,}97$, $b = 720$ e $C = 12000$ na fórmula apresentada como solução da equação $f(k+1) = af(k) + b$, obtemos $P(n) = (0{,}97)^n(12000) + \frac{1-(0{,}97)^n}{1-0{,}97} \cdot 720$. Assim, quando $n = 5$, a população é de

$$P(5) = (0{,}97)^5(12000) + \frac{1-(0{,}97)^5}{1-0{,}97} \cdot 720 = 13695 \text{ habitantes}.$$

b) Para encontrar a população de longo prazo, calcula-se o limite

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty}\left[(0{,}97)^n(12000) + \frac{1-(0{,}97)^n}{1-0{,}97}\cdot 720\right] = 0 + \frac{1-0}{0{,}03}\cdot 720 = 24000 \text{habitantes}$$

Assim, após um longo período de tempo, a população tende a se estabilizar em 24.000 habitantes.

Sistemas de Amortização

Como este trabalho visa aplicar a Equação de Diferenças aos financiamentos imobiliários, é preciso tratar dos sistemas de amortização possíveis para estes financiamentos. Para isso observar-se-á o funcionamento dos sistemas SAC, PRICE, SAM e SACRE.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Esse sistema, amplamente utilizado no Brasil nos financiamentos imobiliários, consiste, como o próprio nome diz, em amortizar o principal da dívida pelo meio de parcelas constantes e sucessivas, obtidas pela divisão do valor do empréstimo pelo número de prestações do contrato.

O valor de cada prestação sucessiva no SAC é composto por uma parcela de juros vencidos, calculados sobre o saldo devedor, e outra correspondente a uma parcela fixa a título de amortização de capital.

No SAC, o saldo devedor do empréstimo decresce em progressão aritmética e, em conseqüência disto os valores dos juros e da prestação também decrescem com uma razão fixa.

Para calcular o saldo devedor no sistema SAC, sem termos que utilizar um quadro demonstrativo, pode-se usar a fórmula $SD_n = P \times \left(1 - \frac{n}{nt}\right)$, em que SD_n é o saldo devedor do empréstimo após o pagamento de n parcelas, P é o valor principal emprestado, n é o número de parcelas pagas e nt é o número total de parcelas do financiamento.

Para calcular a parcela a ser paga no sistema SAC, sem utilizar um quadro demonstrativo, pode-se usar a fórmula $PMT = \frac{P}{nt} + SD_{n-1} \times i$ em que *PMT* é o valor da prestação que desejamos encontrar, *P* é o valor principal emprestado, *nt* é o número total de parcelas do financiamento, SD_{n-1} é o saldo devedor do empréstimo após o pagamento da prestação anterior que desejamos encontrar e *i* é a taxa de juros na forma decimal.

Sistema PRICE ou Francês de Amortização

Este sistema consiste no pagamento da dívida por meio de prestações de valores iguais, com periodicidade constante e com termos vencidos. Nesse sistema, cada prestação contém uma parcela de juros e outra de principal amortizado. Como as parcelas são todas do mesmo valor, à medida que elas vão sendo quitadas, as quotas de amortização são progressivamente maiores, fazendo com que o saldo devedor, ao longo do tempo, fique menor e conseqüentemente os juros tornem-se menores.

O valor das prestações no sistema PRICE é obtido por meio da fórmula $PMT = P \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right]$ onde *PMT* é o valor da prestação que se deseja encontrar, *P* é o valor principal emprestado, *n* é o número total de parcelas do financiamento e *i* é a taxa de juros na forma decimal.

Sistema de Amortização Misto (SAM)

Analisando os dois sistemas estudados anteriormente, nota-se que para um mesmo prazo, uma mesma taxa de juros e um mesmo capital financiado, as prestações iniciais do sistema PRICE são menores que as do sistema SAC. Por outro lado, a amortização do SAC é mais rápida e por isso o total de juros acumulados, quando é adotado o sistema PRICE, é maior que se fosse utilizado o sistema SAC.

Para buscar um equilíbrio, o extinto Banco Nacional da Habitação[2] criou e utilizou no passado o Sistema de Amortização Mista (SAM). Nesse sistema, os valores das prestações, juros, amortizações e saldo devedores são obtidos pela média aritmética entre os valores resultantes do sistema SAC e do sistema PRICE, daí a origem do nome Sistema Misto.

O exemplo abaixo possibilita uma melhor compreensão do funcionamento do SAM:

Exemplo 4

Um empréstimo de $ 40.000,00 deverá ser pago por meio de 8 parcelas mensais e sucessivas, vencendo a primeira 30 dias após a contratação, segundo o sistema SAM. Sabendo que a taxa de juros cobrada em tal operação foi de 10% ao mês, construa uma tabela mostrando mensalmente o comportamento da dívida.

Primeiramente deve-se construir uma tabela para o sistema SAC.

Tabela 1 – Sistema de amortização Constante

Prazo (meses)	Prestação	Juros pagos	Principal Amortizado	Saldo Devedor
0	$ 0,00	$ 0,00	$ 0,00	$ 40 000,00
1	$ 9 000,00	$ 4 000,00	$ 5 000,00	$ 35 000,00
2	$ 8 500,00	$ 3 500,00	$ 5 000,00	$ 30 000,00
3	$ 8 000,00	$ 3 000,00	$ 5 000,00	$ 25 000,00
4	$ 7 500,00	$ 2 500,00	$ 5 000,00	$ 20 000,00
5	$ 7 000,00	$ 2 000,00	$ 5 000,00	$ 15 000,00
6	$ 6 500,00	$ 1 500,00	$ 5 000,00	$ 10 000,00
7	$ 6 000,00	$ 1 000,00	$ 5 000,00	$ 5 000,00
8	$ 5 500,00	$ 500,00	$ 5 000,00	$ 0,00
Total	$ 58 000,00	$ 18 000,00	$ 40 000,00	$ 0,00

Logo após deve-se construir uma tabela para o sistema PRICE.

[2] Criado em 1964, o BNH era um banco de segunda linha, ou seja, não operava diretamente com o público. Sua função era realizar operações de crédito e gerir o Fundo de Garantia do Tempo de Serviço (FGTS), por intermédio de bancos privados e/ou públicos e de agentes promotores, como as companhias habitacionais e as companhias de água e esgoto.

O BNH foi a principal instituição federal de desenvolvimento urbano da história brasileira, na qualidade de gestor do FGTS e da formulação e implementação do Sistema Financeiro da Habitação (SFH) e do Sistema Financeiro do Saneamento (SFS). Foi extinto, por decreto presidencial, em 1986.

http://www.mre.gov.br/cdbrasil/itamaraty/web/port/economia/saneam/planasa/bnh/

Tabela 2 - Sistema PRICE				
Prazo (meses)	Prestação	Juros pagos	Principal Amortizado	Saldo Devedor
0	$ 0,00	$ 0,00	$ 0,00	$ 40 000,00
1	$ 7 497,76	$ 4 000,00	$ 3 497,76	$ 36 502,24
2	$ 7 497,76	$ 3 650,22	$ 3 847,54	$ 32 654,70
3	$ 7 497,76	$ 3 265,47	$ 4 232,29	$ 28 422,41
4	$ 7 497,76	$ 2 842,24	$ 4 655,52	$ 23 766,90
5	$ 7 497,76	$ 2 376,69	$ 5 121,07	$ 18 645,83
6	$ 7 497,76	$ 1 864,58	$ 5 633,18	$ 13 012,65
7	$ 7 497,76	$ 1 301,26	$ 6 196,50	$ 6 816,15
8	$ 7 497,76	$ 681,62	$ 6 816,14	$ 0,01
Total	$ 59 982,08	$ 19 982,09	$ 39 999,99	$ 0,01

Para obter-se a tabela do sistema SAM, deve-se calcular a média aritmética entre os valores das prestações, juros, amortizações e saldo devedor.

Tabela 3 - Sistema de Amortização Misto				
Prazo (meses)	Prestação	Juros pagos	Principal Amortizado	Saldo Devedor
0	$ 0,00	$ 0,00	$ 0,00	$ 40 000,00
1	$ 8 248,88	$ 4 000,00	$ 4 248,88	$ 35 751,12
2	$ 7 998,88	$ 3 575,11	$ 4 423,77	$ 31 327,35
3	$ 7 748,88	$ 3 132,74	$ 4 616,14	$ 26 711,21
4	$ 7 498,88	$ 2 671,12	$ 4 827,76	$ 21 883,45
5	$ 7 248,88	$ 2 188,34	$ 5 060,54	$ 16 822,91
6	$ 6 998,88	$ 1 682,29	$ 5 316,59	$ 11 506,32
7	$ 6 748,88	$ 1 150,63	$ 5 598,25	$ 5 908,08
8	$ 6 498,88	$ 590,81	$ 5 908,07	$ 0,00
Total	$ 58 991,04	$ 18 991,04	$ 40 000,00	$ 0,00

Sistema de Amortização Crescente (SACRE)

Este sistema foi desenvolvido pela Caixa Econômica Federal com o objetivo de permitir, nos financiamentos de longo prazo para aquisição de casas próprias, uma amortização mais rápida, reduzindo a parcela de juros sobre o saldo devedor. Na realidade, esse sistema é baseado no sistema SAC, utilizando a metodologia deste para o cálculo e recálculo anual das prestações.

O cálculo da primeira parcela no sistema SACRE assemelha-se ao do sistema SAC, em que o princípio é parecido. A primeira parcela no sistema SACRE é calculada por $PMT = \frac{P}{n} + P \times i$ em que PMT é o valor da primeira prestação que desejamos encontrar, P é o valor principal emprestado, n é o número total de parcelas do financiamento e i é a taxa de juros na forma decimal.

Os financiamentos da Caixa Econômica Federal que seguem esse sistema têm as seguintes características e metodologias de cálculo:

a) No SACRE, no primeiro e segundo anos de contrato, o cálculo da prestação é feito uma vez por ano, a partir do terceiro ano, poderá ser trimestral, caso haja um aumento considerável nos índices de atualização monetária.

b) O valor das doze primeiras parcelas é fixo e, após esse período, a prestação será recalculada para o próximo período de doze meses.

c) O saldo devedor é reajustado mensalmente pela Taxa Referencial (TR).

d) O dia da assinatura da minuta contratual (aniversário do contrato) é o dia que passa a vencer e a ser calculada a prestação mensal.

e) Sobre o valor inicial das prestações serão somadas as importâncias a serem pagas mensalmente a título de seguros e tarifas de administração.

f) Por esse sistema, a prestação inicial pode comprometer até 30% da renda do financiado.

g) O cálculo do valor da primeira prestação é feito segundo a metodologia do sistema SAC, ou seja, divide-se o valor financiado pelo número total de parcelas do contrato e logo após soma-se o valor dos juros calculado sobre o valor do saldo devedor. O financiado irá pagar durante um ano o valor dessas prestações fixas.

h) Mensalmente, o saldo devedor é corrigido pela TR e o valor dos juros será calculado sobre esse saldo atualizado. Uma vez obtido o valor dos juros, este descontado do valor da prestação fixa, resultando na parcela de

KU'RY'TYBA – Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba, Curitiba, v. 1, p. 57-74, Out. 2009. ISSN 2175-9243. DOI:

amortização que diminuirá o saldo devedor existente a cada período.

i) Imediatamente, após o pagamento da 12ª prestação, apura-se o saldo devedor e recalcula-se o valor da prestação que vigorará para os próximos 12 meses, seguindo o mesmo método de cálculo do início do contrato, lembrando que o número total de parcelas ficou reduzido em 12.

Ver-se-á um exemplo para melhorar a assimilação sobre o sistema SACRE:

Exemplo 5

Um imóvel no valor de \$ 100.000,00 foi financiado para pagamento em 180 prestações iguais e mensais, com a primeira vencendo 30 dias após a contratação, segundo o sistema SACRE. Sabendo que a taxa de juros cobrada foi de 1% ao mês e o valor das parcelas será corrigido mensalmente pela Taxa Referencial (TR), pergunta-se:

a) Qual o valor da primeira parcela? b) Qual o valor da décima terceira parcela a ser paga, considerando uma projeção para a TR de 0,25% ao mês constante.

Solução: a) $PMT = \frac{P}{n} + P \times i \rightarrow PMT = \frac{100000}{180} + 100000 \times 0{,}01 = \$1.555{,}56$.

b) Essa questão será resolvida com a ajuda de uma tabela, e para facilitar a compreensão, será passada a metodologia de montagem da tabela.

Calcular-se-á separadamente os valores dos juros (J) da primeira parcela, a partir do saldo devedor atualizado (SDA) pela TR.

$$SDA = SD \times \left(1 + \frac{TR}{100}\right)$$

$$SDA = 100000 \times \left(1 + \frac{0{,}25}{100}\right) = \$100.250{,}00.$$

$$J = SDA \times i$$

$$J = 100250 \times 0{,}01 = \$1.002{,}50$$

Com o valor dos juros e da primeira parcela, calculou-se a amortização da primeira parcela e o saldo devedor logo após o pagamento desta parcela.

$$\mathrm{A} = 1555{,}56 - 1002{,}50 = \$553{,}06 \quad e \quad \mathrm{SD}_1 = 100250{,}00 - 553{,}06 = \$99.696{,}94$$

KU'RY'TYBA – Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba, Curitiba, v. 1, p. 57-74, Out. 2009. ISSN 2175-9243. DOI:

Após calculou-se o valor do saldo devedor atualizado pela TR e o valor dos juros da segunda parcela.

$$SDA = SD \times \left(1 + \frac{TR}{100}\right)$$

$$SDA = 99696{,}94 \times \left(1 + \frac{0{,}25}{100}\right) = \$99.946{,}18$$

$$J = SDA \times i$$

$$J = 99946{,}18 \times 0{,}01 = \$999{,}46$$

E faz-se assim por diante até o fim da 12ª parcela. Após esta parcela, o valor da 13ª deve ser recalculado, visto que no sistema SACRE a parcela é recalculada a cada 12 meses. Portanto, a 13ª parcela é calculada utilizando o saldo devedor como base do valor principal do empréstimo e desconsiderando os meses que já foram pagos.

$$PMT = \frac{P}{n} + P \times i$$

$$PMT = \frac{96102{,}05}{168} + 96102{,}05 \times 0{,}01 = \$1.533{,}06$$

E, assim, pode-se completar a tabela.

Tabela 4 - Sistema SACRE

Parcela	TR (%)	SD Atualizado	Amortização	Juros	Valor da Parcela	SD após o pagamento
0	0,25%	$ 100 000,00	$ 0,00	$ 0,00	$ 0,00	$ 100 000,00
1	0,25%	$ 100 250,00	$ 553,06	$ 1 002,50	$ 1 555,56	$ 99 696,94
2	0,25%	$ 99 946,19	$ 556,09	$ 999,46	$ 1 555,56	$ 99 390,09
3	0,25%	$ 99 638,57	$ 559,17	$ 996,39	$ 1 555,56	$ 99 079,40
4	0,25%	$ 99 327,10	$ 562,28	$ 993,27	$ 1 555,56	$ 98 764,81
5	0,25%	$ 99 011,72	$ 565,44	$ 990,12	$ 1 555,56	$ 98 446,29
6	0,25%	$ 98 692,40	$ 568,63	$ 986,92	$ 1 555,56	$ 98 123,77
7	0,25%	$ 98 369,08	$ 571,86	$ 983,69	$ 1 555,56	$ 97 797,21
8	0,25%	$ 98 041,71	$ 575,14	$ 980,42	$ 1 555,56	$ 97 466,57
9	0,25%	$ 97 710,24	$ 578,45	$ 977,10	$ 1 555,56	$ 97 131,78
10	0,25%	$ 97 374,61	$ 581,81	$ 973,75	$ 1 555,56	$ 96 792,80
11	0,25%	$ 97 034,78	$ 585,21	$ 970,35	$ 1 555,56	$ 96 449,58
12	0,25%	$ 96 690,70	$ 588,65	$ 966,91	$ 1 555,56	$ 96 102,05
13	0,25%	$ 96 342,31	$ 569,63	$ 963,42	$ 1 533,06	$ 95 772,67

Observa-se então que a 13ª parcela vale $1.533,06.

Financiamentos Habitacionais da Caixa Econômica Federal

Atualmente, a Caixa Econômica Federal tem feito seus financiamentos habitacionais utilizando apenas o sistema SAC, porém a instituição já utilizou outros sistemas de amortização, como mostra a norma HH01800 (2000, p. 6 e 7) da CEF.

Segundo esta norma, os sistemas SAM, PRICE e SACRE já foram utilizados pela instituição, porém estão em desuso atualmente. O sistema PRICE, também conhecido por SFA (Sistema Francês de Amortização) foi utilizado, pois sua prestação era composta por *"uma parcela de juros decrescente ao longo do prazo e outra de amortização que cresce de forma exponencial"* (HH01800, 2000, p. 6).

Aplicação da Equação de Diferenças em financiamentos

Antes da análise da funcionalidade da Equação de Diferenças nos financiamentos Habitacionais da Caixa Econômica Federal, segue um exemplo que demonstra a utilização desta fórmula num financiamento qualquer.

Exemplo 6

Uma pessoa toma \$10.000,00 a 5% de juros capitalizados anualmente. A dívida deve ser paga em prestações iguais de \$ *A* ao fim de cada ano, durante 8 anos. Usando uma equação de diferenças, encontre o valor de *A*.

Solução: Seja $P(k)$ a quantidade ainda devida ao fim de k anos, para $k = 0, 1, 2, ..., 8$. Então, exatamente após o pagamento, ao fim do $(k + 1)$-ésimo ano, a dívida será de $P(k+1) = 1{,}05P(k) - A$. Substituindo $a = 1{,}05$, $b = -A$ e $C = 10.000$ na fórmula para solução geral de equação de diferenças $f(k+1) = af(k) + b$, obtém-se

$$P(k) = (1{,}05)^k (10000) + \left[\frac{1-(1{,}05)^k}{1-1{,}05}\right] \times (-A).$$

Como a dívida deve ser quitada em 8 anos, tem-se que $P(8) = 0$. Assim, $P(8) = 0 = (1{,}05)^8 (10000) + \left[\frac{1-(1{,}05)^8}{1-1{,}05}\right] \times (-A)$. Isolando A, conclui-se que a prestação anual deve ser

KU'RY'TYBA – Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba, Curitiba, v. 1, p. 57-74, Out. 2009. ISSN 2175-9243. DOI:

$$A = \frac{10000 \times (1{,}05)^8}{\left[\dfrac{1-(1{,}05)^8}{1-1{,}05}\right]} = \$1.547{,}21$$

Este exemplo mostrou como utilizar tal equação no movimento financeiro denominado financiamento, que consiste em a pessoa, física ou jurídica, emprestar dinheiro de uma instituição financeira para uma determinada aplicação e pagá-lo em um determinado número de tempo acrescido de certa taxa de juros. Durante o pagamento das parcelas, parte destas destina-se aos juros cobrados pelo empréstimo e outra parte destina-se a abater a quantia que foi emprestada. Tal ato denomina-se amortização.

Como abordado no capítulo anterior, os sistemas de amortização de dívidas em financiamentos habitacionais variam em suas determinações de como pagar, quanto pagar por parcela, quanto pagar de juros. E estas variantes é que caracterizam cada um dos sistemas.

Observando o exemplo acima, nota-se que o uso da Equação de Diferenças é destinado a um tipo específico de financiamento, que é o financiamento que utiliza o sistema PRICE como sistema de amortização. Isto porque a Equação de Diferenças trabalha com um sistema de amortização de parcelas iguais, e este é o princípio do Sistema PRICE de Amortização.

O exemplo abaixo será resolvido das duas maneiras, pela Equação de Diferenças e pela equação mostrada no sistema PRICE, e mostrará como funcionam semelhantemente.

Exemplo 7

Uma empresa adquiriu um imóvel de \$ 2.000.000,00 pagando 50% à vista e financiando o restante em 36 parcelas iguais, com taxa de juros de 4% capitalizados mensalmente. a) Calcule, utilizando uma equação de diferenças, o valor da parcela a ser paga. b) Calcule, utilizando a o sistema PRICE, o valor da parcela a ser paga.

Solução: a) Seja $Q(k)$ a quantidade ainda devida ao fim de k meses, para *k = 0, 1, 2, ..., 36*. Então, exatamente após o pagamento, ao fim do $(k + 1)$-ésimo mês, a dívida será de $P(k+1) = 1{,}04P(k) - A$. Substituindo $a = 1{,}04$, $b = -A$ e $C = 1.000.000$ na fórmula para solução geral de equação de diferenças $f(k+1) = af(k) + b$, obtém-se $P(k) = (1{,}04)^k(1000000) + \left[\frac{1-(1{,}04)^k}{1-1{,}04}\right] \times (-A)$.

Como a dívida deve ser quitada em 36 meses, tem-se que $P(36) = 0$. Assim, $P(36) = 0 = (1{,}04)^{36}(1000000) + \left[\frac{1-(1{,}04)^{36}}{1-1{,}04}\right] \times (-A)$.

Isolando A, conclui-se que a prestação mensal deve ser

$$A = \frac{1000000 \times (1{,}04)^{36}}{\left[\frac{1-(1{,}04)^{36}}{1-1{,}04}\right]} = \$52.886{,}88$$

b) Utilizando o sistema PRICE para fazer o cálculo da parcela a ser paga, pode-se recorrer à utilização da equação de tal sistema $PMT = P \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}\right]$.

Nesta equação, tem-se que o valor da prestação que desejamos encontrar, representado por *PMT*, é calculado em função de $P = 1.000.000$, $n = 36$ e $i = 0{,}04$ e encontra-se então $PMT = 1000000 \times \left[\frac{(1+0{,}04)^{36} \times 0{,}04}{(1+0{,}04)^{36} - 1}\right] = \$52.886{,}88$.

Com a resolução destes exercícios, mostra-se que a utilização da equação do sistema PRICE já é um uso simplificado e mais direto que a aplicação de uma equação de diferenças. A equação de diferenças funcionou semelhante à equação do sistema PRICE, calculando uma parcela idêntica à parcela calculada pela equação deste sistema. Com isso, demonstra-se então a utilização de tal equação nos financiamentos habitacionais.

Conclusão

Como a Caixa Econômica Federal utiliza-se atualmente do sistema SAC, e por já ter utilizado há tempos o sistema PRICE, é desaconselhável a utilização de Equações de Diferenças para o cálculo das parcelas destes financiamentos.

KU'RY'TYBA – Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba, Curitiba, v. 1, p. 57-74, Out. 2009. ISSN 2175-9243. DOI:

E mesmo que a Caixa Econômica Federal volte a utilizar o sistema PRICE, ou Sistema Francês de Amortização, para seus financiamentos habitacionais, ainda assim, é aconselhável a utilização da equação proposta no sistema para o cálculo da parcela a ser paga, levando em conta sua praticidade e objetividade.

Abre-se ainda um ponto positivo do artigo, em que se mostra como um tópico da matemática pura, no estudo de Séries Geométricas, onde se mostrou as Equações de Diferenças, pode ser aplicado a situações cotidianas como um financiamento habitacional, e assim demonstrando sua validade quanto a ser um tópico relevante no universo matemático.

Espera-se que este estudo possa servir de motivação para a busca incessante de novas aplicações de tópicos de matemática pura em situações cotidianas, fazendo assim com que as pessoas tenham mais facilidade e familiaridade com a matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H. *Cálculo Diferencial e Integral, Volume 2,* São Paulo: Bookman Companhia Editora – 6ª Edição – 1999.

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. HH 01800 Planos de Reajuste e Sistemas de Amortização no Crédito Imobiliário. 2000.

DE FRANCISCO, W. *Matemática Financeira,* São Paulo: Editora Atlas S.A. – 7ª Edição – 1991

HOFFMAN, L. D. *Cálculo: Um Curso Moderno e Suas Aplicações*, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. – 6ª edição – 1999.

LIMA, E. L. *Análise Real, Volume 1,* Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – Coleção Matemática Universitária – 8ª Edição – 2004.

MUNEM, M. A. e FOULIS, D. J. *Cálculo, Volume 2,* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. – 1982.

TOSI, A. T. *Matemática Financeira com Ênfase em Produtos Bancários,* São Paulo: Editora Atlas S.A. – 1ª Edição – 2003.